

Université de Montréal

# **Modules réflexifs de rang 1 sur les variétés nilpotentes**

par Colin Jauffret

Département de Mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de Philosophiæ Doctor en Mathématiques

septembre 2016

© 2016 Colin Jauffret



Université de Montréal  
Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée  
**Modules réflexifs de rang 1 sur les variétés nilpotentes**

présentée par  
Colin Jauffret

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes

Octavian Cornea,	président-rapporteur
Abraham Broer,	directeur de recherche
Robert Bédard,	membre du jury
Jochen Kuttler,	examineur externe

Thèse acceptée le 1<sup>er</sup> décembre 2016



# Sommaire

Soit  $G$  un groupe algébrique linéaire complexe, simple, connexe et simplement connexe. Étant donné un sous-groupe parabolique  $P \subset G$  et un idéal nilpotent  $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{p}$ , il existe un morphisme propre d'effondrement  $G \times^P \mathfrak{n} \rightarrow G\mathfrak{n}$ . Il se factorise en une variété affine et normale  $N := \operatorname{Spec} \mathbb{C}[G \times^P \mathfrak{n}]$  que nous appelons variété nilpotente.

Sous l'hypothèse que l'effondrement soit génériquement fini, nous décrivons le groupe des classes de diviseurs équivariants de  $N$  à l'aide de  $\mathbb{C}[N]$ -modules réflexifs équivariants de rang 1. Un représentant de chaque classe peut être choisi comme les sections globales d'un fibré en droite sur  $G \times^{P'} \mathfrak{n}'$  où  $G \times^{P'} \mathfrak{n}' \rightarrow G\mathfrak{n}'$  est un effondrement possiblement distinct qui se factorise à travers la même variété nilpotente.

Dans le cas où le groupe  $G$  est de type  $A$  ou dans le cas d'un effondrement provenant de certains diagrammes de Dynkin pondérés spécifiques, nous démontrons que les représentants proviennent de poids qui peuvent être choisis comme dominants. Dans ce cas, nous démontrons que si le module représente un élément torsion du groupe des classes, alors il est Cohen–Macaulay. Nous en déduisons un théorème d'annulation en cohomologie.

**Mots clés :** variété nilpotente normale, groupe des classes, module réflexif, théorème d'annulation, cohomologie de fibrés en droites, fibré cotangent d'une variété de drapeaux.



# Summary

Let  $G$  be a simple, connected, simply connected complex linear algebraic group with parabolic subgroup  $P \subset G$  and nilpotent ideal  $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{p}$ . The proper collapsing map  $G \times^P \mathfrak{n} \rightarrow G\mathfrak{n}$  factors through the normal affine variety  $N := \text{Spec } \mathbb{C}[G \times^P \mathfrak{n}]$  which is called a nilpotent variety.

Assuming the collapsing is generically finite, we describe the equivariant divisor class group of  $N$  using rank 1 reflexive equivariant  $\mathbb{C}[N]$ -modules. A representative of each class may be chosen as global sections of a line bundle over  $G \times^{P'} \mathfrak{n}'$  where  $G \times^{P'} \mathfrak{n}' \rightarrow G\mathfrak{n}'$  is a possibly distinct collapsing that factors through the same nilpotent variety.

Assuming either  $G$  is of type  $A$  or the collapsing comes from specific weighted Dynkin diagrams, we show that each representative arise from a weight that may be chosen dominant. Moreover, if the module represents a torsion element within the class group, then it is Cohen–Macaulay and we deduce a cohomological vanishing theorem.

**Keywords :** normal nilpotent variety, class group, reflexive module, vanishing theorem, cohomology of line bundles, cotangent bundle of a flag variety.





# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>v</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>vii</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2 Groupe des classes des variétés nilpotentes</b>	<b>7</b>
2.1 Groupe des classes et modules réflexifs . . . . .	7
2.2 Notations . . . . .	8
2.3 Diagrammes de Dynkin pondérés et sous-groupes paraboliques . . . . .	9
2.4 Fibrés vectoriels sur une variété de drapeaux . . . . .	11
2.5 Effondrement . . . . .	12
2.6 Covariants et diviseurs . . . . .	13
2.7 Théorèmes d’annulation . . . . .	16
2.8 Description des sections globales pour un poids dominant . . . . .	18
2.9 Réflexivité de certains fibrés en droites . . . . .	19
2.10 Modules Cohen–Macaulay . . . . .	23
2.11 Quelques isomorphismes en cohomologie . . . . .	24
2.12 Généralisation à des sous-diagrammes encadrés de deux . . . . .	32
<b>3 Groupe des classes et caractères des centralisateurs</b>	<b>39</b>
3.1 Type $A$ . . . . .	40
3.2 Types $B$ et $D$ . . . . .	41
3.3 Type $C$ . . . . .	47
3.4 Groupes des classes . . . . .	48

<b>4</b>	<b>Représentants des groupes des classes : type <math>A</math></b>	<b>51</b>
4.1	Diagramme de Dynkin pondéré de forme normale . . . . .	52
4.2	Diagramme associé à une orbite nilpotente . . . . .	53
4.3	Caractère sous forme normale . . . . .	56
4.4	Covariants et échange de blocs . . . . .	57
4.5	Représentants dominants . . . . .	66
4.6	Représentants antidominants . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Représentants des groupes des classes : type <math>B</math></b>	<b>81</b>
5.1	Diagrammes de Dynkin officiels et pairs . . . . .	81
5.2	Représentants de forme normale . . . . .	84
5.3	Autres diagrammes . . . . .	95
5.4	Structure de groupe . . . . .	98
5.5	Représentants dominants et antidominants . . . . .	100
<b>6</b>	<b>Représentants des groupes des classes : type <math>C</math></b>	<b>101</b>
6.1	Diagrammes de Dynkin officiels et pairs . . . . .	101
6.2	Partition entièrement composée de parties impaires . . . . .	104
6.3	Partition entièrement composée de parties paires . . . . .	106
6.4	Autres diagrammes . . . . .	107
6.5	Représentants dominants et antidominants . . . . .	107
<b>7</b>	<b>Représentants des groupes des classes : type <math>D</math></b>	<b>109</b>
7.1	Diagrammes de Dynkin officiels et pairs . . . . .	109
7.2	Partition entièrement composée de parties paires . . . . .	112
7.3	Partition entièrement composée de parties impaires . . . . .	115
7.4	Autres diagrammes . . . . .	127
7.5	Représentants dominants et antidominants . . . . .	127
7.6	Représentants unifiés . . . . .	127
<b>8</b>	<b>Représentants des groupes des classes : types exceptionnels</b>	<b>131</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>159</b>

# Liste des tableaux

4.1	$(t, l)$ -blocs pour $0 \leq t, l \leq 3$ .	52
5.1	Covariants d'un diagramme officiel USD de type $B_n$ .	83
5.2	Formes normales pour un diagramme de 2 blocs	93
6.1	Covariants d'un diagramme officiel USD de type $C_n$ .	103
7.1	Covariants d'un diagramme officiel un seul deux de type $D_n$ .	112
8.1	Covariants pour $E_6$ .	136
8.2	Covariants pour $E_7$ .	140
8.3	Covariants pour $E_8$ .	147
8.4	Covariants pour $F_4$ .	149
8.5	Covariants pour $G_2$ .	150
8.6	Représentants dominants dans $E_6$ .	151
8.7	Représentants dominants dans $E_7$ .	154
8.8	Représentants dominants dans $E_8$ .	157
8.9	Représentants dominants dans $F_4$ .	158
8.10	Représentants dominants dans $G_2$ .	158



# Remerciements

D'abord, je souhaite adresser mes plus sincères remerciements à mon directeur de recherche, Abraham Broer, qui sait toujours me faire réaliser tout ce qu'il me reste à apprendre sans trop me décourager. Je le remercie pour sa très grande disponibilité. De plus, la patience dont il a fait preuve dans ses explications m'a permis d'apprendre énormément et je lui en suis reconnaissant.

Je remercie aussi ma collègue Isabelle pour une collaboration et agréable.

Enfin, je remercie le FQRNT et à la Faculté des études supérieures et postdoctorales pour l'appui financier qui a permis la réalisation de cette thèse.



# Chapitre 1

## Introduction

Soit  $G$  un groupe algébrique linéaire simple, complexe, connexe avec algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  et posons  $\mathcal{N}$  pour le cône nilpotent. On appelle *variété nilpotente* toute variété  $N$  affine, normale, munie d'une  $G \times \mathbb{C}^*$ -action admettant une  $G$ -orbite dense et un morphisme fini  $\varphi : N \rightarrow \mathcal{N}$ . Cette définition est légèrement plus générale que l'adhérence d'une orbite nilpotente et nous permettra de considérer aussi plusieurs de leurs recouvrements qui sont aussi utiles.

Nous construirons des exemples de telles variétés nilpotentes à la section 2.3 en utilisant les diagrammes de Dynkin pondérés. Cette construction nous procurera aussi un sous-groupe parabolique  $P \subset G$  et idéal nilpotent  $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{p}$  tel que le fibré vectoriel  $G \times^P \mathfrak{n}$  sur  $G/P$  admet un morphisme que nous appellerons *effondrement* ou *collapsing* :

$$\begin{aligned} \mu : G \times^P \mathfrak{n} &\rightarrow G\mathfrak{n} \\ [g, x] &\mapsto gx. \end{aligned}$$

L'effondrement est une application propre. En posant  $N := \operatorname{Spec} \mathbb{C}[G \times^P \mathfrak{n}]$ , on peut donc utiliser la factorisation de Stein

$$\begin{array}{ccc} G \times^P \mathfrak{n} & \xrightarrow{\mu} & G\mathfrak{n} \\ & \searrow \tilde{\mu} & \uparrow \nu \\ & & N \end{array}$$

## 1. INTRODUCTION

---

où  $\tilde{\mu}$  est propre à fibres connexes et  $\nu$  est finie. La variété  $N$  est alors une variété nilpotente au sens de notre définition.

L'effondrement étant essentiel à nos méthodes, nous supposons pour le reste de l'introduction qu'il existe. On adopte aussi une hypothèse supplémentaire : que l'effondrement  $G \times^P \mathfrak{n} \rightarrow G\mathfrak{n}$  soit génériquement fini. Cette condition est notamment vérifiée lorsque  $G \times^P \mathfrak{n}$  est le fibré cotangent de  $G/P$ . Elle est aussi vérifiée lorsque la variété nilpotente est construite à partir d'un diagramme de Dynkin pondéré *officiel*, c'est-à-dire que le parabolique  $P$  et l'idéal  $\mathfrak{n} := \mathfrak{g}_{\geq 2}$  sont construits à l'aide de la graduation induite par un triplet  $\mathfrak{sl}_2$ .

La supposition que l'effondrement soit génériquement fini implique quelques conséquences intéressantes. L'effondrement  $G \times^P \mathfrak{n} \rightarrow N$  est alors une résolution des singularités. En particulier, on obtient une annulation en cohomologie :

$$H^i(G \times^P \mathfrak{n}, \mathcal{O}_{G \times^P \mathfrak{n}}) = 0$$

pour  $i \geq 1$  par [23]. En appliquant le théorème de Grauert–Riemenschneider, on obtient aussi l'annulation

$$H^i(G \times^P \mathfrak{n}, \omega_{G \times^P \mathfrak{n}}) = 0$$

pour  $i \geq 1$  où  $\omega_{G \times^P \mathfrak{n}}$  est le faisceau canonique.

En ce qui concerne plus spécifiquement le contenu de cette thèse, que l'effondrement soit génériquement fini permet de construire une présentation du groupe des classes de  $N$ . La présentation obtenue dépend du parabolique  $P$  et en particulier, nous obtenons en fait plusieurs présentations du groupe des classes.

**Théorème 1.1.** *Soit  $G$  un groupe simple et simplement connexe. Supposons que l'effondrement  $\mu : G \times^P \mathfrak{n} \rightarrow G\mathfrak{n}$  soit génériquement fini et soit  $N$  la variété nilpotente correspondante. Posons  $\mathbb{Z}\Lambda$  pour le sous-réseau des poids  $X(P)$  engendré par les poids de  $P$ -covariants irréductibles dans  $\mathbb{C}[\mathfrak{n}]$ .*

*Alors il existe un isomorphisme*

$$\mathrm{Cl}(N) \simeq X(P)/\mathbb{Z}\Lambda.$$

*Démonstration.* Proposition 2.9. □

Ce théorème nous permet déjà de calculer les groupes des classes des variétés nilpotentes. Nous désirons cependant faire mieux en donnant une description des éléments du groupe



des classes. Comme premier pas, nous utiliserons une caractérisation de Yuan [47] du groupe des classes de  $N$  : il s'agit du groupe formé des classes d'isomorphismes de  $\mathbf{C}[N]$ -modules réflexifs de rang 1 avec comme opération le produit tensoriel modifié. En particulier, nous pouvons décrire le groupe des classes de  $N$  en se servant de modules de la forme  $H^0(G \times^P \mathfrak{n}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{n}}(\mathbf{C}_\lambda)^*)^{**}$  où  $\mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{n}}(\mathbf{C}_\lambda)$  désigne le faisceau des sections du fibré en droites  $G \times^P (\mathfrak{n} \oplus \mathbf{C}_\lambda)$  sur  $G \times^P \mathfrak{n}$ . Cette approche n'est pas entièrement satisfaisante étant donné que le calcul du double dual est une opération difficile. En effet, on peut le caractériser le double dual d'un  $\mathbf{C}[N]$ -module  $M$  comme l'intersection des localisations  $M_{\mathfrak{p}}$  à tous les idéaux  $\mathfrak{p}$  premiers de hauteur 1 de  $\mathbf{C}[N]$ . Il s'agit en particulier d'un analogue pour les modules de la normalisation de  $\mathbf{C}[N]$  et il s'agit d'un problème proportionnellement ardu.

Nous parvenons à éviter cette difficulté en choisissant comme représentants des éléments du groupe des classes des modules qui sont déjà connus comme réflexifs. À cette fin, nous démontrons dans un premier temps qu'une grande classe de modules sont réflexifs. Sous l'hypothèse que  $G \times^P \mathfrak{n}$  est le fibré cotangent de  $G/P$ , les modules  $H^0(G \times^P \mathfrak{n}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{n}}(\mathbf{C}_\lambda)^*)$  où  $\lambda$  est antidominant sont tous réflexifs. Il s'agit d'une conséquence de grands résultats généraux de géométrie algébrique, notamment de la dualité de Grothendieck.

**Théorème 1.2** (Réflexivité de certains fibrés en droites). *Soit  $G$  un groupe simple et simplement connexe,  $P$  un sous-groupe parabolique de  $G$  et  $\mu : G \times^P \mathfrak{n} \rightarrow G\mathfrak{n}$  l'effondrement avec  $G \times^P \mathfrak{n} = T^*G/P$ . Soit  $\lambda \in X^+(P)$  un poids dominant de  $P$ , de telle sorte que  $-\lambda$  soit antidominant.*

*Il existe un isomorphisme*

$$H^0(G \times^P \mathfrak{n}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{n}}(\mathbf{C}_{-\lambda})^*) \simeq H^0(G \times^P \mathfrak{n}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{n}}(\mathbf{C}_\lambda)^*)^*$$

*et le  $\mathbf{C}[N]$ -module  $H^0(G \times^P \mathfrak{n}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{n}}(\mathbf{C}_{-\lambda})^*)$  est réflexif.*

*Démonstration.* Théorème 2.20. □

Nous désirons faire encore mieux en identifiant des représentants des éléments du groupe des classes de  $N$  comme des  $\mathbf{C}[N]$ -modules réflexifs de rang 1 de la forme  $H^0(G \times^P \mathfrak{n}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{n}}(\mathbf{C}_\lambda)^*)$  pour un poids  $\lambda$  dominant. Nous y parvenons dans un ou l'autre des cas particuliers suivants :

1.  $G$  est de type  $A$ ;

## 1. INTRODUCTION

---

2.  $G \times^P \mathfrak{n}$  est le fibré cotangent de  $G/P$  et  $P$  et  $\mathfrak{n}$  sont construits à l'aide d'un diagramme de Dynkin pondéré *officiel* (voir la section 2.5).

De tels représentants ont de nombreux avantages. Le principal est l'existence d'un théorème d'annulation pour la cohomologie  $H^i(G \times^P \mathfrak{n}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{n}}(\mathbf{C}_\lambda)^*) = 0$  pour  $i \geq 1$ , ils présentent donc un analogue de singularités rationnelles pour les modules. Mieux, nous pouvons utiliser un tel représentant pour obtenir de nouveaux théorèmes d'annulation. Après le choix d'un sous-groupe de Borel pour déterminer les racines positifs, nous avons le théorème suivant.

**Théorème 1.3** (Théorème d'annulation). *Soit  $G$  un groupe simple et simplement connexe,  $P$  un sous-groupe parabolique de  $G$  et  $\mu : G \times^P \mathfrak{n} \rightarrow G\mathfrak{n}$  l'effondrement avec  $G \times^P \mathfrak{n} = T^*G/P$ . Soit un poids  $\lambda \in X(P)$  dominant tel que  $H^0(G \times^P \mathfrak{n}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{n}}(\mathbf{C}_\lambda)^*)$  est un  $\mathbf{C}[G \times^P \mathfrak{n}]$ -module réflexif et Cohen–Macaulay.*

*Alors  $H^i(G \times^P \mathfrak{n}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{n}}(\mathbf{C}_{-\lambda})^*) = 0$  pour  $i \geq 1$ .*

*Démonstration.* Corollaire 2.22. □

Le théorème d'annulation précédent est particulièrement utile à l'aide d'un critère simple permettant d'identifier les modules Cohen–Macaulay. Nous donnons un tel critère : il suffit que sa classe d'isomorphisme soit torsion dans le groupe des classes.

**Théorème 1.4** (Critère pour Cohen–Macaulay). *Soit  $G$  un groupe simple et simplement connexe,  $P$  un sous-groupe parabolique de  $G$  et  $\mu : G \times^P \mathfrak{n} \rightarrow G\mathfrak{n}$  un effondrement génériquement fini. Soit un poids  $\lambda \in X(P)$  tel que  $H^0(G \times^P \mathfrak{n}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{n}}(\mathbf{C}_\lambda))^{**}$  est un élément de torsion dans le groupe des classes. Alors  $H^0(G \times^P \mathfrak{n}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{n}}(\mathbf{C}_\lambda))^{**}$  est Cohen–Macaulay.*

*En particulier, si  $H^0(G \times^P \mathfrak{n}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{n}}(\mathbf{C}_\lambda))$  est un module réflexif, alors il est Cohen–Macaulay.*

*Démonstration.* Théorème 2.23. □

Nous discutons enfin des méthodes permettant d'obtenir ces résultats. La stratégie est de débiter avec des représentants du groupe des classes de la forme  $H^0(G \times^P \mathfrak{n}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{n}}(\mathbf{C}_{\lambda^-})^*)$  pour  $\lambda^-$  antidominant. Nous savons qu'un tel module est déjà réflexif. Nous utilisons ensuite des applications répétées et méticuleuses de théorèmes d'isomorphisme en cohomologie

---

pour démontrer qu'il existe un effondrement possiblement distinct  $G \times^{P'} \mathfrak{n}' \rightarrow G\mathfrak{n}'$  pour la même variété nilpotente  $N$  et un poids dominant  $\lambda^\star \in X(P')$  tel que

$$H^0(G \times^P \mathfrak{n}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{n}}(\mathbf{C}_{\lambda^-})^*) \simeq H^0(G \times^{P'} \mathfrak{n}', \mathcal{L}_{G \times^{P'} \mathfrak{n}'}(\mathbf{C}_{\lambda^\star})^*)$$

Le procédé rappelle la démonstration du théorème de Borel–Weil–Bott où un poids  $\lambda$  est rendu progressivement *plus dominant*. Toutefois, plutôt que d'utiliser l'action du groupe de Weyl comme dans le théorème de Borel–Weil–Bott, nous avons deux outils à notre disposition.

Le premier outil est une famille de théorèmes d'isomorphisme provenant des travaux de Sommers [41, 43, 42]. Pour les groupes de type  $A_n$ ,  $D_n$  (pour  $n$  impair) et  $E_6$ , nous utilisons la symétrie du diagramme de Dynkin pour construire un isomorphisme du type

$$H^0(G \times^P \mathfrak{n}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{n}}(\mathbf{C}_\lambda)^*) \simeq H^0(G \times^{P'} \mathfrak{n}', \mathcal{L}_{G \times^{P'} \mathfrak{n}'}(\mathbf{C}_{\lambda'})^*)$$

où nous modifions simultanément le poids et le sous-groupe parabolique. Nous discutons de ces isomorphismes en détail au théorème 2.25.

Le second outil est un autre type d'isomorphisme discuté dans la thèse de Ascah-Coallier [1]. Il s'applique dans le cas où l'effondrement  $G \times^P \mathfrak{n}$  implique un sous-groupe parabolique maximal. Supposons qu'il existe un  $P$ -covariant dans  $\mathbf{C}[\mathfrak{n}]$  de poids  $\mu$  et que  $\lambda$  soit un poids tel que  $\lambda + \mu$  est antidominant. Alors il existe un isomorphisme

$$H^0(G \times^P \mathfrak{n}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{n}}(\mathbf{C}_\lambda)^*) \simeq H^0(G \times^P \mathfrak{n}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{n}}(\mathbf{C}_{\lambda+\mu})^*).$$

La combinaison de ces outils donne beaucoup de liberté dans la manipulation de la cohomologie des fibrés en droites. Il s'agit de méthodes générales qui sont d'intérêt au-delà du présent travail.

Pour chacun de ces deux outils, les théorèmes s'appliquent pour des sous-groupes paraboliques qui sont maximaux. Nous disposons de méthodes permettant de les généraliser à d'autres sous-groupes paraboliques dans la mesure où une hypothèse additionnelle est vérifiée. Nous discutons de cette question à la section 2.12. Il s'agit de la raison pour laquelle nous restreignons nos travaux à la situation où  $G \times^P \mathfrak{n}$  est le fibré cotangent de  $G/P$ , dans ce cas nous pouvons librement utiliser ces deux outils.

Pour ce qui est de l'autre condition, que le diagramme de Dynkin pondéré soit officiel, il s'agit d'une condition suffisante pour garantir l'existence de suffisamment de covariants

## 1. INTRODUCTION

---

irréductibles pour obtenir des représentants dominants. Sans cette hypothèse, nous avons des exemples où certains modules réflexifs de rang 1 ne sont pas isomorphes à un module de la forme  $H^0(G \times^P \mathfrak{n}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{n}}(\mathbf{C}_\lambda)^*)$  pour un poids  $\lambda$  dominant. Cependant, sous ces deux conditions, nous parvenons dans tous les cas à obtenir un représentant de chacun des éléments du groupe des classes de la forme appropriée.

## Chapitre 2

# Groupe des classes des variétés nilpotentes

### 2.1 Groupe des classes et modules réflexifs

Soit  $A$  un anneau intègre, commutatif, noethérien et normal et  $M$  un  $A$ -module. Le *dual* de  $M$ , noté  $M^*$ , est l'ensemble des homomorphismes de  $A$ -modules de  $M$  dans  $A$ . Il est doté de la structure de  $A$ -module évidente. Il existe un homomorphisme naturel de  $A$ -module entre  $M$  et son double dual  $M^{**}$  obtenu en évaluant les applications de  $M^{**}$  à un élément donné de  $M$  :

$$\begin{aligned} M &\rightarrow M^{**} \\ m &\mapsto (\phi \mapsto \phi(m)). \end{aligned}$$

Cet homomorphisme n'est en général ni injectif ni surjectif. Cependant, s'il s'agit d'un isomorphisme, on dit que le module  $M$  est *réflexif*.

Soit  $K$  le corps de fractions de  $A$ . On définit le rang de  $M$  comme la dimension de  $M \otimes_A K$  comme  $K$ -espace vectoriel.

Le *groupe des classes* de  $A$ , noté  $\text{Cl}(A)$ , est défini comme l'ensemble des classes d'isomorphisme de  $A$ -modules réflexifs de rang 1. Il s'agit d'un groupe avec l'opération du *produit tensoriel modifié* définie comme  $M \odot N := (M \otimes_A N)^{**}$  pour deux  $A$ -modules réflexifs de rang un  $M$  et  $N$  représentant respectivement leur classe d'isomorphisme. L'iden-

tité est la classe du  $A$ -module  $A$  et l'inverse de la classe d'un  $A$ -module  $M$  est celle de  $M^*$ .

*Remarque 2.1.* Cette définition du groupe des classes est inhabituelle mais bien adaptée à nos besoins. Elle provient d'un article de Yuan [47] où on démontre que le groupe des classes obtenu est isomorphe à celui utilisé en algèbre [5, §7.4] ou en géométrie algébrique [20, II.6].

Il s'agit d'une approche similaire à l'identification du groupe des classes d'une variété lisse avec le groupe de Picard formé des modules inversibles.

Dans le cas des variétés affines et normales, comme les variétés nilpotentes  $N$  qui sont supposées normales, on pourra identifier leur groupe des classes avec celui de leur anneau de fonctions régulières  $\mathbf{C}[N]$ .

Enfin, le résultat simple suivant nous sera utile.

**Théorème 2.2.** *Soit  $A$  un anneau normal et  $M$  et  $N$  des  $A$ -modules réflexifs. Soit  $\phi : M \rightarrow N$  un morphisme de  $A$ -modules dont les supports du noyau et du conoyau sont de codimension au moins deux dans  $\text{Spec}(A)$ . Alors  $\phi$  est un isomorphisme.*

*Démonstration.* Voir [5, §7.4] où un tel morphisme est appelé *pseudo-isomorphisme*.  $\square$

Nous utiliserons aussi le résultat similaire suivant au seul le module  $M$  est supposé réflexif.

**Théorème 2.3.** *Soit  $A$  un anneau normal et une suite exacte courte de  $A$ -modules*

$$0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow Q \rightarrow 0$$

*où  $M$  est réflexif,  $N$  est finiment engendré et sans torsion et  $Q$  est finiment engendré et de codimension au moins 2 dans  $\text{Spec}(A)$ . Alors tout idéal associé à  $Q$  est  $\{0\}$  ou un idéal de hauteur 1.*

*Démonstration.* Voir [5, §7.4.2, prop. 7].  $\square$

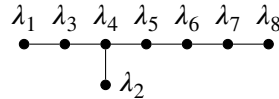
## 2.2 Notations

On se contentera ici de fixer les notations générales, en référant à [26, 27] pour davantage de détails.

Soit  $G$  un groupe algébrique linéaire complexe, simple, connexe et simplement connexe et  $B$  un sous-groupe de Borel de  $G$  contenant un tore maximal  $T$ . À la paire  $(G, T)$  s'associe un système de racines  $\Phi$ , on dénotera par  $\Phi^+$  et  $\Delta$  respectivement les sous-ensembles des racines positives et simples déterminées par le choix du sous-groupe de Borel. Le groupe de Weyl est  $W = N_G(T)/T$ . Il est engendré par les réflexions simples qu'on notera  $s_\alpha$  pour  $\alpha \in \Delta$ .

Soit  $X$  le réseau des poids. Il s'identifie au groupe multiplicatif des caractères algébriques  $X(T) := \text{Hom}(T, \mathbb{C}^\times)$  de  $T$ . On munit  $X$  d'une forme bilinéaire,  $W$ -invariante, symétrique et non dégénérée qu'on notera par  $(-, -)$ . Chaque racine  $\alpha \in \Phi$  définit une coracine  $\alpha^\vee := \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)} \in X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ . Les poids fondamentaux sont les poids  $\{\omega_\alpha : \alpha \in \Delta\}$  définis par la propriété que  $(\omega_\alpha, \alpha^\vee) = 1$  et  $(\omega_\alpha, \beta^\vee) = 0$  pour toute autre racine simple  $\beta$ . Les poids fondamentaux forment une  $\mathbb{Z}$ -base du réseau des poids. Les poids dominants  $X^+$  sont caractérisés par la propriété  $(\lambda, \alpha^\vee) \geq 0$  pour toutes les racines simples  $\alpha$ . En particulier, les poids dominants sont les éléments du monoïde engendré par les poids fondamentaux.

Le groupe  $G$  étant simple, il détermine une algèbre de Lie simple et un diagramme de Dynkin. Nous utiliserons ce diagramme pour noter les poids  $\lambda \in X$  de manière plus visuelle : le poids  $\lambda := \sum_{\alpha_i \in \Delta} \lambda_i \omega_i$  sera dénoté par le diagramme de Dynkin de  $G$  où le coefficient  $\lambda_i$  du poids fondamental  $\omega_i$  est juxtaposé à la racine simple correspondante  $\alpha_i$ . Ainsi, nous écrirons le poids  $\sum_{i=1}^8 \lambda_i \omega_i$  d'un groupe de type  $E_8$  à l'aide du diagramme suivant.



Cet exemple fixe incidemment la numérotation des racines simples : nous utiliserons les conventions de Bourbaki [6]. Nous définirons davantage de décorations pour les diagrammes de Dynkin à la sous-section suivante et à la section 4.3.

## 2.3 Diagrammes de Dynkin pondérés et sous-groupes paraboliques

Le choix d'une pondération sur le diagramme de Dynkin d'un groupe  $G$  permet la construction d'un sous-groupe parabolique  $P$  et d'une graduation sur l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . Avec en plus le choix d'un entier  $k$ , on obtient également un morphisme propre et surjectif

appelé *effondrement*  $G \times^P \mathfrak{g}_{\geq k} \rightarrow G\mathfrak{g}_{\geq k}$  vers une sous-variété du cône nilpotent. Cette approche utilisée avec la factorisation de Stein nous permettra de construire la majorité des variétés nilpotentes étudiées.

Un *diagramme de Dynkin pondéré* est un diagramme de Dynkin muni d'une *pondération*, c'est-à-dire d'une fonction  $D : \Delta \rightarrow \mathbf{Z}_{\geq 0}$  appliquant chaque racine simple  $\alpha_i$  à un entier non négatif  $d_i$ . On pourrait aussi au besoin considérer des pondérations rationnelles  $D : \Delta \rightarrow \mathbf{Q}_{\geq 0}$ . Dans les faits, nous nous bornerons à considérer des pondérations où les entiers non négatifs  $d_i$  sont tous soit 0 ou 2; un tel diagramme de Dynkin pondéré est dit *pair*. Dans ce cas, il est possible et plus commode de dénoter la pondération en imprimant le diagramme de Dynkin de telle sorte que les racines simples  $\alpha$  telles que  $D(\alpha) = 2$  soient de couleur noire ( $\bullet$ ) et que les racines simples  $\alpha$  telles que  $D(\alpha) = 0$  soient de couleur blanche ( $\circ$ ). Par extension, on dira d'une racine simple ou d'un nœud du diagramme qu'il est *blanc* si  $D(\alpha) = 0$  et qu'il est *noir* si  $D(\alpha) = 2$ .

Étant donné un groupe, on utilisera généralement la lettre gothique ( $\mathfrak{G}$ raftur) correspondante pour noter son algèbre de Lie. En particulier, soit  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie de  $G$  et considérons une pondération  $D$  sur le diagramme de Dynkin de  $\mathfrak{g}$ . On peut étendre linéairement la pondération  $D$  à une racine ou un poids arbitraire  $\alpha = \sum_{i=1}^r n_i \alpha_i$  en posant  $D(\alpha) := \sum_{i=1}^r n_i d_i$ .

De cette manière, la décomposition de  $\mathfrak{g}$  en espace de racines  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$  et une pondération  $D$  induisent une graduation de  $\mathfrak{g}$  :

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} \mathfrak{g}_i^D$$

où

$$\mathfrak{g}_i^D := \bigoplus_{\alpha : D(\alpha)=i} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Cette graduation respecte le crochet de Lie, c'est-à-dire que  $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$  pour tout  $i, j \in \mathbf{Z}$ .

On désire maintenant construire un sous-groupe parabolique  $P^D$  de  $G$  en se servant d'une pondération  $D$ . On peut procéder à l'aide des sous-groupes paraboliques *standards*. On pose d'abord  $\Delta_0 \subset \Delta$  pour le sous-ensemble des racines simples  $\alpha \in \Delta$  telles que  $D(\alpha) = 0$ . On pose ensuite  $W_I := \langle s_\alpha : \alpha \in \Delta_0 \rangle \subset W$  et enfin on obtient le sous-groupe parabolique standard associé  $P^D := \bigcup_{\alpha \in \Delta_0} BW_\alpha B$ . N'importe quel sous-groupe parabolique est conjugué à un sous-groupe de cette forme.



Le sous-groupe parabolique  $P^D$  admet une décomposition de Levi  $P^D = L^D U^D$  où  $L^D$  est réductif et  $U^D$  est le radical unipotent. On peut exprimer les algèbres de Lie de ces sous-groupes en terme de la pondération :

$$\begin{aligned}\mathfrak{p}^D &:= \mathfrak{g}_{\geq 0} = \bigoplus_{k \geq 0} \mathfrak{g}_k; \\ \mathfrak{l}^D &:= \mathfrak{g}_0 = \bigoplus_{k=0} \mathfrak{g}_k; \\ \mathfrak{n}^D &:= \mathfrak{g}_{>0} = \bigoplus_{k > 0} \mathfrak{g}_k.\end{aligned}$$

Si le diagramme de Dynkin pondéré est pair, on note que  $\mathfrak{n}^D = \mathfrak{g}_{\geq 2}^D$ .

Le groupe de caractères  $X(P^D)$  s'identifie aux poids  $\lambda \in X$  tels que  $(\lambda, \alpha^\vee) = 0$  pour toutes les racines  $\alpha \in \Delta_0$ . En particulier, une  $\mathbb{Z}$ -base est formée par les poids fondamentaux associés aux racines simples de  $\Delta \setminus \Delta_0$ .

**Définition 2.4.** Un exemple particulier de diagramme de Dynkin pondéré qui sera particulièrement important ici est un diagramme  $D$  où la pondération est entièrement nulle à l'exception d'une unique racine simple pour laquelle la pondération vaut 2. On appelle un tel diagramme un diagramme *un seul deux* ou simplement un diagramme USD. Les diagrammes USD sont étudiés en détail par Ascah-Coallier [1]. Ils constitueront pour nous un outil privilégié pour faire de l'induction.

## 2.4 Fibrés vectoriels sur une variété de drapeaux

Soit  $P$  un sous-groupe parabolique de  $G$ . L'espace homogène  $G/P$  est une variété projective appelée une *variété de drapeaux*. Étant donné un  $P$ -module  $V$ , on construit un fibré vectoriel  $G \times^P V$  comme le quotient de la variété  $G \times V$  par la  $P$ -action définie par  $p(g, v) := (gp^{-1}, pv)$ . La projection  $\pi : G \times^P V \rightarrow G/P$  est donnée par  $\pi([g, v]) \mapsto gP$ . Le fibré  $G \times^P V$  est doté de la  $G$ -action  $g'[g, v] = [g'g, v]$ .

Étant donné un second  $P$ -module  $W$ , on peut construire à nouveau un fibré  $G \times^P W$  sur  $G/P$  et puis en se servant de la projection du premier fibré  $G \times^P V$ , le fibré *pullback*  $\pi^*(G \times^P W)$  sur  $G \times^P V$ . Il existe alors un isomorphisme  $\pi^*(G \times^P W) \simeq G \times^P (V \oplus W)$ . On note  $\mathcal{L}_{G \times^P V}(W)$  pour le faisceau des sections.

Nous considérons les groupes de cohomologie  $H^i(G \times^P V, \mathcal{L}_{G \times^P V}(W))$ . En plus de la structure de  $G$ -module, ces groupes sont aussi pourvus d'une structure compatible de

$\mathbf{C}[G \times^P V]$ -modules. Enfin, on peut les doter d'une graduation à l'aide de l'isomorphisme suivant qui vient de l'action de  $\mathbf{C}^*$   $s[g, x] = [g, sx]$

$$H^i(G \times^P V, \mathcal{L}_{G \times^P V}(W)) \simeq \bigoplus H^i(G/P, \mathcal{L}_{G/P}(S^n V^* \otimes W)).$$

Nous avons ici opté de ne pas considérer la graduation. Nos méthodes le permettent et les résultats seraient pertinents, mais nous préférons différer ces calculs à des travaux futurs.

Nos principaux outils de travail seront les fibrés de cette forme, où  $V := \mathfrak{g}_{\geq 2}$  et  $W := \mathbf{C}_\lambda^*$ . Dans ce cas,  $\mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_\lambda)^*$  est un fibré en droites sur  $G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}$ . On considérera avec beaucoup d'attention  $H^0(G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_\lambda)^*)$ ; il s'agit d'un  $\mathbf{C}[G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}]$ -module avec  $G$ -action compatible. Il est de rang 1, sans torsion, gradué et noethérien.

## 2.5 Effondrement

Étant donné un diagramme de Dynkin pondéré  $D$ , nous avons construit le fibré vectoriel  $G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}$ . Nous considérons maintenant le morphisme appelé *effondrement*

$$\begin{aligned} \mu : G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2} &\rightarrow G\mathfrak{g}_{\geq 2} \\ [g, x] &\mapsto gx. \end{aligned}$$

Il s'agit d'un morphisme  $G$ -équivariant et surjectif. Il est également propre et même projectif étant donné qu'il se factorise comme

$$G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2} \hookrightarrow G \times^P \mathfrak{g} \simeq G/P \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}.$$

En particulier, l'image  $G\mathfrak{g}_{\geq 2}$  est une sous-variété fermée et irréductible du cône nilpotent. Elle est formée d'un nombre fini de  $G$ -orbites, toutes de dimension paire. Dans l'objectif d'utiliser la définition du groupe des classes de la section 2.1, nous avons besoin d'une variété normale ce qu'on obtient à l'aide de la factorisation de Stein.

L'algèbre de type fini des fonctions régulières sur le fibré  $G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}$  est notée  $\mathbf{C}[G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}]$  et la variété correspondante  $N_D := \text{Spec } \mathbf{C}[G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}]$ . Il s'agit d'une variété nilpotente au sens de notre définition et donc en particulier une variété normale. On peut factoriser l'application moment par  $N_D$  à l'aide de la *factorisation de Stein* :

$$\begin{array}{ccc}
 G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2} & \xrightarrow{\tilde{\mu}} & N_D \\
 & \searrow \mu & \downarrow g \\
 & & G\mathfrak{g}_{\geq 2}
 \end{array}$$

Nous désirons discuter plus en détail deux exemples qui seront les plus pertinents.

*Exemple 2.5.* Soit  $e \in \mathfrak{g}$  un élément nilpotent. Alors par le théorème de Jacobson–Morozov, il existe un triple  $\mathfrak{sl}_2 \{e, f, h\}$  avec  $[e, f] = h$ ,  $[h, e] = 2e$  et  $[h, f] = -2f$ . L'élément  $h$  est semi-simple et définit une graduation sur  $\mathfrak{g}$  donnée par  $\mathfrak{g}_i := \{x \in \mathfrak{g} : [h, x] = ix\}$  pour chaque entier  $i$ . Pour chaque racine simple  $\alpha$ , l'espace de racine  $\mathfrak{g}_\alpha$  est invariant sous l'action de  $h$  et on obtient un diagramme de Dynkin pondéré à l'aide de la graduation :  $D(\alpha) := i$  où  $i$  est tel que  $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}_i$ .

Nous appellerons ces diagrammes de Dynkin pondérés des diagrammes *officiels*. Dans le cas des diagrammes de Dynkin officiels, l'effondrement  $G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2} \rightarrow G\mathfrak{g}_{\geq 2}$  est birationnel et  $N_D$  est la normalisation de  $G\mathfrak{g}_{\geq 2}$ . On trouvera une description de tous les diagrammes de Dynkin officiels dans le livre de Carter [11].

*Exemple 2.6.* Supposons que  $D$  est un diagramme de Dynkin pondéré *pair*, c'est-à-dire que  $D(\alpha)$  est 0 ou 2 pour chaque racine simple  $\alpha$ . Dans ce cas, il suit que  $\mathfrak{g}_{\geq 2}$  est l'algèbre de Lie du radical unipotent  $P$ ,  $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}_{>0}$ . En particulier, on peut identifier  $G \times^P \mathfrak{n}$  avec le fibré cotangent de  $G/P$ . Dans ce cas, l'effondrement est l'application moment de la géométrie symplectique. Aussi, il suit d'un théorème de Richardson [39] que l'effondrement est  $G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2} \rightarrow G\mathfrak{g}_{\geq 2}$  génériquement fini.

## 2.6 Covariants et diviseurs

Comme applications des sections précédentes, on discute comment décrire le groupe des classes d'une variété nilpotente à l'aide de covariants.

Soit  $G$  un groupe simple et simplement connexe et  $D$  un diagramme de Dynkin pondéré déterminant un parabolique  $P$  et un idéal nilpotent  $\mathfrak{g}_{\geq 2}$  tels que l'effondrement  $G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2} \rightarrow G\mathfrak{g}_{\geq 2}$  soit génériquement fini. Un  $P$ -covariant de  $\mathfrak{g}_{\geq 2}$  de poids  $\lambda \in X(P)$  est un polynôme  $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}_{\geq 2}]$  tel que  $f(px) = \lambda(p)f(x)$  pour tout  $x \in \mathfrak{g}_{\geq 2}$  et  $p \in P$ . Alternativement, un  $P$ -covariant est un morphisme  $P$ -équivariant  $\mathfrak{g}_{\geq 2} \rightarrow \mathbb{C}_\lambda$ .

Sous l'hypothèse que l'effondrement  $G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2} \rightarrow G\mathfrak{g}_{\geq 2}$  soit génériquement fini, l'action de  $P$  sur  $\mathfrak{g}_{\geq 2}$  admet une orbite dense, disons  $Pe \subset \mathfrak{g}_{\geq 2}$ . Cette propriété fait de  $\mathfrak{g}_{\geq 2}$  un *espace vectoriel préhomogène* [30] ce qui entraîne plusieurs résultats qui seront utiles. Pour chaque poids  $\lambda \in X(P)$ , il existe à multiplication par un scalaire près au plus un covariant irréductible de poids  $\lambda$ . Un tel covariant, disons  $f$ , est homogène au sens où il existe un unique entier positif  $d$  tel que  $f(cx) = c^d f(x)$  pour tout  $c \in \mathbb{C}^\times$  et  $x \in \mathfrak{g}_{\geq 2}$ . L'anneau  $\mathbb{C}[\mathfrak{g}_{\geq 2}]$  étant factoriel, n'importe quel covariant est le produit de covariants irréductibles. On pose  $\{f_i : 1 \leq i \leq s\}$  pour l'ensemble des  $P$ -covariants irréductibles,  $\Lambda := \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\} \subset X(P)$  pour leur poids et  $\mathbb{Z}\Lambda \subset X(P)$  pour le réseau qu'ils engendrent.

Avant de décrire les groupes des classes à l'aide des  $P$ -covariants d'une variété nilpotente, on donne un lemme qui décrit le groupe des classes en terme des caractères du centralisateur d'un élément l'orbite nilpotente correspondante. Cette description sera elle-même utile au chapitre 3 où nous identifierons les groupes de classes des orbites nilpotentes des groupes de type classique en se servant de leur classification à l'aide de partitions.

On prépare d'abord quelques notations. Toujours en supposant que l'effondrement  $G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2} \rightarrow G\mathfrak{g}_{\geq 2}$  soit génériquement fini, on dénote sa factorisation par  $G \times^P n \xrightarrow{\tilde{\mu}} N$  et la  $P$ -orbite dense de  $\mathfrak{g}_{\geq 2}$  par  $Pe \subset \mathfrak{g}_{\geq 2}$ . Dans ce cas,  $G$  agit avec une orbite dense sur  $G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}$  et on pose  $\tilde{e} := \tilde{\mu}([1, e]) \in N$ . La restriction de  $\tilde{\mu}$  est alors un isomorphisme des orbites denses  $G[1, e] \simeq G\tilde{e}$ . On note respectivement  $G_{\tilde{e}}$  et  $P_e$  pour les stabilisateurs dans  $G$  et  $P$ .

**Lemme 2.7.** *Soit  $G$  un groupe simple et simplement connexe et  $D$  un diagramme de Dynkin pondéré déterminant un parabolique  $P$  et l'idéal nilpotent  $\mathfrak{g}_{\geq 2}$  tels que l'effondrement  $G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2} \rightarrow G\mathfrak{g}_{\geq 2}$  soit génériquement fini.*

*Alors il existe un isomorphisme  $\text{Cl}(N) \simeq X(P_e)$ .*

*Démonstration.* Les  $G$ -orbites étant de dimensions paires, on a que le groupe des classes de  $N$  est isomorphe à celui de son orbite dense.

$$\text{Cl}(N) \simeq \text{Cl}(G\tilde{e}) \simeq \text{Cl}(G/G_{\tilde{e}}).$$

L'orbite  $G\tilde{e}$  est lisse et en particulier, son groupe des classes est isomorphe à son groupe de Picard  $G$ -équivariant. Ce dernier groupe peut être calculé à l'aide des résultats de [32] qui donnent une suite exacte pour tout sous-groupe  $H \subset G$  fermé

$$X(G) \rightarrow X(H) \rightarrow \text{Pic}(G/H) \rightarrow \text{Pic}(G).$$

Comme on suppose que  $G$  est un groupe simple, son groupe de caractères est trivial  $X(G) = 0$ . Un résultat de Popov [37] indique que le groupe de Picard  $G$ -équivariant d'un groupe semi-simple et connexe est isomorphe à son groupe fondamental. Comme on suppose ici que  $G$  est simplement connexe, on obtient  $\text{Pic}(G) = 0$ .

En posant  $H := G_{\tilde{e}}$ , la suite exacte précédente donne donc un isomorphisme

$$\text{Pic}(G_{\tilde{e}}) \simeq X(G_{\tilde{e}}).$$

On conclut en remarquant que  $G_{\tilde{e}} \simeq P_e$ .

□

*Remarque 2.8.* Plus généralement, nous avons sous les mêmes conditions que

$$\text{Cl}(N) \simeq X(G_{\tilde{e}}) \simeq X(P_e) \simeq X(P_e/[P_e, P_e]).$$

**Proposition 2.9.** *Soit  $G$  un groupe simple et simplement connexe et  $D$  un diagramme de Dynkin pondéré déterminant un parabolique  $P$  et l'idéal nilpotent  $\mathfrak{g}_{\geq 2}$  tels que l'effondrement  $G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2} \rightarrow G \mathfrak{g}_{\geq 2}$  soit génériquement fini. Soit  $\mathbf{Z}\Lambda$  le sous-réseau de  $X(P)$  engendré par les poids des covariants irréductibles.*

*Il existe un isomorphisme*

$$\text{Cl}(N) \simeq X(P)/\mathbf{Z}\Lambda.$$

*Démonstration.* En poursuivant avec les notations précédentes, nous avons un isomorphisme des orbites denses  $G[1, e] \simeq G_{\tilde{e}}$  donné par la restriction de  $\tilde{\mu}$ .

On considère le fermé  $Z := G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2} \setminus G[1, e]$ . Par [20, II.6.5], il existe un morphisme surjectif

$$\text{Cl}(G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}) \rightarrow \text{Cl}(G[1, e])$$

dont le noyau est formé des diviseurs à support dans  $Z$ .

Comme  $G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}$  est un fibré vectoriel sur  $G/P$ ,  $\text{Cl}(G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}) \simeq \text{Cl}(G/P)$ . Comme  $G/P$  est lisse, il suit de la preuve du lemme 2.7 que  $\text{Cl}(G/P) \simeq \text{Pic}(G/P) \simeq X(P)$ .

Pour ce qui est du noyau, un diviseur  $G$ -stable à support dans  $Z$  est de la forme  $G \times^P Z'$  où  $Z'$  est une variété  $P$ -stable de codimension 1 dans  $\mathfrak{g}_{\geq 2}$ . En particulier,  $Z'$  doit être les zéros d'un  $P$ -covariant. L'anneau  $\mathbf{C}[\mathfrak{g}_{\geq 2}]$  étant factoriel, on peut factoriser  $f$  comme un produit de covariants irréductibles. □

## 2. GROUPE DES CLASSES DES VARIÉTÉS NILPOTENTES

---

On pourra désormais passer librement de l'une à l'autre des différentes caractérisations du groupe des classes. Spécifiquement, tous les groupes suivants sont isomorphes.

1. Les classes d'isomorphismes de  $\mathbf{C}[N]$ -modules réflexifs de rang 1 avec action de  $G$  compatible ;
2. Le quotient  $X(P)/\mathbf{Z}\Lambda$  ;
3. Le groupe de caractères du stabilisateur  $X(P_e)$  ;
4. Le groupe de Picard  $G$ -équivariant des fibrés en droites  $G$ -équivariants sur  $G[1, e]$  ;

On conclut cette section en prenant note de l'existence de suites exactes obtenues à l'aide d'un  $P$ -covariant qui seront cruciales pour la suite.

**Proposition 2.10.** *Soit  $G$  un groupe semi-simple et simplement connexe et  $P$  un sous-groupe parabolique de  $G$ . On suppose que l'effondrement  $G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2} \rightarrow G\mathfrak{g}_{\geq 2}$  est génériquement fini. Soit  $\lambda \in X(P)$  le poids d'un  $P$ -covariant  $f$  non nul de  $\mathbf{C}[\mathfrak{g}_{\geq 2}]$ . En notant  $\mathcal{V}(f) \subset \mathfrak{g}_{\geq 2}$  les zéros de  $f$  et  $i : G \times^P \mathcal{V}(f) \rightarrow G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}$  le morphisme d'inclusion, alors il existe une suite exacte où*

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_\lambda)^* \rightarrow \mathcal{O}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}} \rightarrow i_* \mathcal{O}_{G \times^P \mathcal{V}(f)} \rightarrow 0.$$

*Si  $\mu, \nu \in X(P)$  sont des caractères de  $P$  tels que  $\nu - \mu = \lambda$ , alors il existe une suite exacte*

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_\nu)^* \rightarrow \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_\mu)^* \rightarrow i_* \mathcal{L}_{G \times^P \mathcal{V}(f)}(\mathbf{C}_\mu)^* \rightarrow 0.$$

*Démonstration.* Le morphisme  $f : \mathfrak{g}_{\geq 2} \rightarrow \mathbf{C}_\lambda$  définit une section globale du fibré  $G \times^P (\mathfrak{g}_{\geq 2} + \mathbf{C}_\lambda)$  donnée par  $s([g, x]) := [g, (x, f(x))]$ , ce qui donne la première suite exacte.

Pour la deuxième suite exacte, il suffira de tensoriser la première avec le faisceau plat  $\mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_\mu)^*$  et noter que

$$i_* \mathcal{O}_{G \times^P \mathcal{V}(f)} \otimes \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_\mu)^* \simeq i_* \mathcal{L}_{G \times^P \mathcal{V}(f)}(\mathbf{C}_\mu)^*.$$

□

### 2.7 Théorèmes d'annulation

**Théorème 2.11** (Borel–Weil–Bott). *Soit  $G$  un groupe réductif et  $P$  un sous-groupe parabolique de  $G$  et  $P = LU$  sa décomposition de Levi où  $T \subset L$ . Soit  $\mu$  un poids dominant*

pour le sous-groupe de Levi  $L$ . On écrira  $V_{P,\mu}$  pour le  $P$ -module irréductible de plus haut poids  $\mu$  et  $\varrho$  pour la demi-somme des racines positives de  $G$ .

S'il existe un poids dominant  $\lambda$  de  $G$  et un élément du groupe de Weyl  $w$  tels que

$$w(\mu + \varrho) - \varrho = \lambda,$$

alors  $\mu$  est dit régulier et l'unique groupe de cohomologie non nul est

$$H^{l(w)}(G/P, \mathcal{L}_{G/P}(V_{P,\mu})^*) \simeq V_{G,\lambda}^*.$$

Sinon,  $\mu$  n'est pas régulier et tous les groupes de cohomologie sont nuls.

Démonstration. [14]. □

**Théorème 2.12** (Kempf). Soit  $G$  un groupe réductif et  $P$  un sous-groupe parabolique de  $G$ . Soit  $W$  un  $G$ -module et  $V \subset W$  un  $P$ -sous-module où le radical unipotent de  $P$  agit trivialement. Alors il existe un isomorphisme

$$\mathbf{C}[GV] \simeq \bigoplus_{n \geq 0} H^0(G/P, \mathcal{L}_{G/P}(S^n V^*))$$

et

$$H^i(G/P, \mathcal{L}_{G/P}(S^n V^*)) = 0$$

pour tout  $i > 0$  et  $n \geq 0$ .

Démonstration. [23]. □

**Théorème 2.13** (Grauert–Riemenschneider). Soit  $Y$  une variété non singulière,  $\omega_Y$  son faisceau canonique et  $f : Y \rightarrow X$  un morphisme surjectif et propre. Alors

$$R^i f_* \omega_Y = 0$$

pour tout  $i$  supérieur à la dimension relative de  $f$ .

Démonstration. [17] ou [29]. □

**Théorème 2.14** (Broer). Soit  $G$  un groupe simple et simplement connexe et  $P$  un sous-groupe parabolique de  $G$ . Si  $\lambda \in X(P)$  est dominant, alors pour n'importe quel  $i \geq 1$ ,

$$H^i(T^*G/P, \mathcal{L}_{T^*G/P}(\mathbf{C}_\lambda)^*) = 0.$$

*Démonstration.* [10] ou [9]. □

*Remarque 2.15.* Le dernier théorème d’annulation sera crucial pour démontrer que les représentants des éléments du groupe des classes sont effectivement réflexifs. Sa démonstration repose sur le théorème d’annulation de Grauert–Riemenschneider. Nous ne considérons que les groupes complexes pour cette raison.

## 2.8 Description des sections globales pour un poids dominant

Soit  $G$  un groupe simple et simplement connexe,  $P$  un sous-groupe parabolique,  $G \times^P \mathfrak{n}$  le fibré cotangent de  $G/P$  et  $\lambda \in X(P)$ .

De manière générale, la description explicite des groupes de cohomologie  $H^i(G \times^P \mathfrak{n}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{n}}(\mathbf{C}_\lambda)^*)$  est une question délicate pour laquelle il n’existe pas d’algorithme général. Toutefois, il existe un algorithme pour calculer la *caractéristique d’Euler* correspondante. En particulier, dans le cas où la cohomologie supérieure s’annule, on obtient beaucoup d’informations sur le module  $H^0(G \times^P \mathfrak{n}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{n}}(\mathbf{C}_\lambda)^*)$ . On consultera notamment [9, 7, 19].

Posons  $K_0(G \times^P \mathfrak{n})$  pour le groupe de Grothendieck des  $\mathbf{C}[G \times^P \mathfrak{n}]$ -modules gradués finiment engendrés et munis d’une  $G$ -action compatible. Il s’agit du groupe engendré par les classes d’isomorphismes  $[M]$  de modules  $M$  appropriés et soumis à la relation  $[M] = [M'] + [M'']$  pour chaque suite exacte courte

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

de  $\mathbf{C}[G \times^P \mathfrak{n}]$ -modules gradués finiment engendrés et munis d’une  $G$ -action compatible.

**Définition 2.16.** Soit  $V$  un  $P$ -module qui n’est pas nécessairement complètement réductible. La *caractéristique d’Euler* du faisceau  $\mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{n}}(V)$  est l’élément du groupe de Grothendieck

$$\chi(G \times^P \mathfrak{n}, V) := \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i [H^i(G \times^P \mathfrak{n}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{n}}(V))].$$

Comme  $G$ -module virtuel,  $\chi(G \times^P \mathfrak{n}, \mathbf{C}_\lambda^*)$  est isomorphe à un module induit d’un  $L$ -module. Si de plus que  $\lambda$  est dominant, Broer [9] utilise son théorème d’annulation (théorème 2.14) afin d’obtenir la formule suivante pour n’importe quel poids dominant  $\mu$



$$\sum_{n \geq 0} \operatorname{Hom}_G(V(\mu)^*, H^0(G/P, \mathcal{L}_{G/P}(S^n \mathfrak{n}^* \otimes \mathbf{C}_\lambda^*))) q^n = m_\mu^{P, \lambda}(q)$$

où  $V(\mu)$  est le  $G$ -module irréductible de plus haut poids  $\mu$  et  $m_\mu^{P, \lambda}$  sont les  $q$ -analogues de multiplicités des poids de Lusztig :

$$m_\mu^{P, \lambda}(q) := \sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} p_q^P(w(\lambda + \rho) - \rho - \mu)$$

avec  $p_q^P$  la fonction de partition de Kostant, c'est-à-dire que  $p_q^P(\lambda)$  est le coefficient de  $e^\lambda$  dans

$$\prod_{\mu \in \Phi^+ \setminus \Phi_P^+} \frac{1}{1 - qe^\mu}.$$

## 2.9 Réflexivité de certains fibrés en droites

Soit  $P$  un sous-groupe parabolique de  $G$  et  $\lambda \in X^+(P)$  un poids dominant de telle sorte que  $-\lambda$  soit antidominant. Cette section vise à démontrer que dans le cas d'un diagramme  $D$  pair, le  $\mathbf{C}[G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}]$ -module  $H^0(G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_{-\lambda})^*)$  est réflexif. La démonstration dépend de grands résultats généraux de géométrie, notamment de la dualité de Grothendieck [21]. Dans les faits, nous n'utiliserons que la version de la dualité pour un morphisme projectif plutôt que le cas général d'un morphisme propre. Il sera toutefois nécessaire d'utiliser quelques aspects des catégories dérivées. Nous référons directement à [21] pour une discussion détaillée de ces constructions. Alternativement, le livre [46] donne un aperçu qui sera suffisant pour nos besoins ; il donne aussi une méticuleuse liste de références.

**Théorème 2.17** (Dualité pour les morphismes projectifs [21, III.§11.1]). *Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme projectif de schémas noethériens de dimension finie. Il existe un isomorphisme*

$$Rf_* R\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(F^\bullet, f^! G^\bullet) \simeq R\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(Rf_* F^\bullet, G^\bullet)$$

où  $F^\bullet \in D_{\text{qc}}^-(X)$  est un complexe borné supérieurement de  $\mathcal{O}_X$ -modules à cohomologie quasi-cohérente et  $G^\bullet \in D_{\text{qc}}^+(Y)$  est un complexe borné inférieurement de  $\mathcal{O}_Y$ -modules à cohomologie quasi-cohérente.

## 2. GROUPE DES CLASSES DES VARIÉTÉS NILPOTENTES

---

Nous appliquerons la dualité de Grothendieck en utilisant des *complexes dualisants*. On donne ici la définition de [46, 1.2.5].

**Définition 2.18.** Un *complexe dualisant* sur un schéma noethérien  $X$  est un complexe de  $\mathcal{O}_X$ -modules  $\omega_X^\bullet$  quasi-cohérents vérifiant les propriétés suivantes :

1.  $\omega_X^\bullet$  est un complexe borné ;
2. Chaque terme de  $\omega_X^\bullet$  est un  $\mathcal{O}_X$ -module injectif ;
3. Chaque groupe de cohomologie  $H^i(\omega_X^\bullet)$  est un module cohérent ;
4. Le morphisme  $\omega_X^\bullet \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}^\bullet(\omega_X^\bullet, \omega_X^\bullet)$  est un quasi-isomorphisme, c'est-à-dire qu'il induit des isomorphismes en cohomologie.

*Remarque 2.19.* Nous sommes dispensés de discuter davantage du foncteur  $f^!$  par le fait que  $f^! \omega_Y = \omega_X$  pour  $\omega_Y$  un complexe dualisant sur  $Y$ ,  $\omega_X$  un complexe dualisant sur  $X$  et  $f$  un morphisme de type fini [21, V.§8.4].

**Théorème 2.20.** Soit  $G$  un groupe simple et simplement connexe et  $D$  un diagramme de Dynkin pondéré déterminant un sous-groupe parabolique  $P$  et l'idéal nilpotent  $\mathfrak{g}_{\geq 2}$  tels que l'effondrement  $G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2} \rightarrow G\mathfrak{g}_{\geq 2}$  soit génériquement fini.

Soit  $\omega \in X(P)$  le poids tel que  $\omega_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}} = \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_\omega)^*$ . Ce poids est donné, en particulier pour les diagramme de Dynkin pondérés rationnels, par

$$\omega := \sum_{\substack{\alpha \in \Phi^+ \\ 0 < D(\alpha) < 2}} -\alpha.$$

Enfin, soit  $\lambda \in X(P)$  un poids tel que pour  $i \geq 0$ ,

$$H^i(G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_\lambda^*)) = 0.$$

Alors il existe pour tout  $i \geq 0$  un isomorphisme de  $\mathbf{C}[G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}]$ -modules gradués avec  $G$ -action compatible

$$H^i(G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_{\omega-\lambda})^*) \simeq \text{Ext}_{\mathbf{C}[G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}]}^i(H^0(G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_\lambda)^*), \mathbf{C}[G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}]).$$

En particulier, il existe un isomorphisme

$$H^0(G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_{\omega-\lambda})^*) \simeq H^0(G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_\lambda)^*)^*$$

et le module  $H^0(G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_{\omega-\lambda})^*)$  est réflexif.

*Démonstration.* Nous appliquons la dualité de Grothendieck à l'aide du morphisme projectif  $\tilde{\mu} : G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2} \rightarrow N$  de la sous-section 2.5 où  $N = \text{Spec } \mathbf{C}[G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}]$ . Pour les complexes, on utilisera sur  $G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}$  le faisceau  $\mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_\lambda)^*$  vu comme un complexe en degré 0 et sur  $N$ , le *complexe dualisant*  $\omega_N^\bullet$ .

On obtient un isomorphisme dans les catégories dérivées :

$$\mathbf{R}\tilde{\mu}_* \mathbf{R}\text{Hom}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_\lambda)^*, \tilde{\mu}^! \omega_N^\bullet) \simeq \mathbf{R}\text{Hom}_N(\mathbf{R}\tilde{\mu}_* \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_\lambda)^*, \omega_N^\bullet).$$

Dans le cas d'une variété Cohen–Macaulay comme  $G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}$ , le complexe dualisant est en fait le faisceau canonique vu comme un complexe concentré en degré 0 [46, 1.2.18]. En utilisant la remarque 2.19, on conclut  $\tilde{\mu}^! \omega_N^\bullet \simeq \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_\omega)^*$ . On obtient donc pour le membre de gauche de l'équation

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\tilde{\mu}_* \mathbf{R}\text{Hom}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_\lambda)^*, \tilde{\mu}^! \omega_N^\bullet) &\simeq \mathbf{R}\tilde{\mu}_* \mathbf{R}\text{Hom}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_\lambda)^*, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_\omega)^*) \\ &\simeq \mathbf{R}\tilde{\mu}_* \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_{\omega-\lambda})^* \\ &\simeq H^\bullet(G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_{\omega-\lambda})^*) \end{aligned}$$

Pour le membre de droite, nous sommes premièrement intéressés à identifier le faisceau dualisant  $\omega_N$ . Pour ce faire, on pose temporairement  $\lambda = 0$  pour obtenir

$$H^\bullet(G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_\omega)^*) \simeq \mathbf{R}\text{Hom}_N(H^0(G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}, \mathcal{O}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}})^\sim, \omega_N).$$

Par le théorème de Grauert–Riemenschneider, on obtient l'annulation

$$H^i(G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_\omega)^*) = 0$$

pour  $i \geq 0$ . Il suit donc de la dualité que

$$H^0(G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_\omega)^*) \simeq \text{Hom}_N(H^0(G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_\omega)^*), \omega_N).$$

En particulier, la propriété (4) du complexe dualisant est vérifiée pour  $\mathcal{O}_N$  à un changement de la graduation près. Toutes les autres propriétés étant aussi vérifiées, on pourra utiliser  $\omega_N = \mathcal{O}_N$ .

En revenant au membre de droite pour un poids  $\lambda$  dominant arbitraire, nous avons

$$\mathbf{R}\tilde{\mu}_* \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_\lambda)^* \simeq H^\bullet(G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_\lambda)^*)$$

## 2. GROUPE DES CLASSES DES VARIÉTÉS NILPOTENTES

---

étant donné que  $N$  est affine. Par hypothèse, nous avons une annulation

$$H^i(G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_\lambda)^*) = 0.$$

On obtient donc le premier isomorphisme annoncé : pour  $i \geq 0$ , il existe un isomorphisme

$$H^i(G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_{\omega-\lambda})^*) \simeq \text{Ext}_{\mathbf{C}[G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}]}^i(H^0(G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_\lambda)^*), \mathbf{C}[G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}]).$$

En posant  $i = 0$ , on obtient le second isomorphisme annoncé :

$$H^0(G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_{\omega-\lambda})^*) \simeq H^0(G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_\lambda)^*)^*.$$

Le dual de n'importe quel faisceau cohérent est réflexif [22], ce qui complète la démonstration.  $\square$

**Corollaire 2.21.** *Soit  $G$  un groupe simple et simplement connexe et  $D$  un diagramme de Dynkin pondéré pair de telle sorte que  $G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2} \simeq T^*G/P$ .*

*Soit  $\lambda \in X(P)$  un poids dominant. Alors il existe un isomorphisme de  $\mathbf{C}[G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}]$ -modules gradués avec  $G$ -action compatible*

$$H^0(G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_{-\lambda})^*) \simeq H^0(G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_\lambda)^*)^*$$

*et le module  $H^0(G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{n}}(\mathbf{C}_{-\lambda})^*)$  est réflexif.*

*Démonstration.* Dans le cas d'un diagramme pair, on a que  $\mathfrak{g}_{\geq 2} = \mathfrak{g}_{>0} = \mathfrak{n}$  est l'algèbre de Lie du radical unipotent de  $P$ . En particulier, on peut identifier  $G \times^P \mathfrak{n}$  avec le fibré cotangent  $T^*G/P$ . Il suit que le faisceau dualisant est trivial étant donné que  $T^*G/P$  est symplectique.

Enfin, le théorème d'annulation de Broer 2.14 donne l'annulation nécessaire pour la cohomologie supérieure du poids dominant.  $\square$

Enfin, on peut déduire de ces résultats un théorème d'annulation.

**Corollaire 2.22** (Théorème d'annulation). *Soit  $G$  un groupe simple et simplement connexe et  $D$  un diagramme de Dynkin pondéré pair, et  $\mu : G \times^P \mathfrak{n} \rightarrow G\mathfrak{n}$  l'effondrement avec  $G \times^P \mathfrak{n} = T^*G/P$ . Soit un poids  $\lambda \in X(P)$  dominant tel que  $H^0(G \times^P \mathfrak{n}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{n}}(\mathbf{C}_\lambda)^*)$  est un  $\mathbf{C}[G \times^P \mathfrak{n}]$ -module réflexif et Cohen–Macaulay.*

*Alors  $H^i(G \times^P \mathfrak{n}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{n}}(\mathbf{C}_{-\lambda})^*) = 0$  pour  $i \geq 1$ .*

*Démonstration.* Par le théorème de dualité 2.20,

$$H^i(G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_{-\lambda})^*) \simeq \text{Ext}_{\mathbf{C}[G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}]}^i(H^0(G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_\lambda)^*), \mathbf{C}[G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}]).$$

Comme on suppose que  $H^0(G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_\lambda)^*)$  est Cohen–Macaulay, on obtient l’annulation désirée pour  $\text{Ext}^{\geq 1}$ .  $\square$

## 2.10 Modules Cohen–Macaulay

**Théorème 2.23.** *Soit  $G$  un groupe simple et simplement connexe et  $D$  un diagramme tel que l’effondrement  $G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2} \rightarrow G\mathfrak{g}_{\geq 2}$  soit génériquement fini. Soit un poids  $\lambda \in X(P)$  tel que  $H^0(G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_\lambda))^{**}$  est un élément de torsion dans le groupe des classes. Alors  $H^0(G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_\lambda))^{**}$  est Cohen–Macaulay.*

*En particulier, si  $H^0(G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_\lambda))$  est un module réflexif, alors il est Cohen–Macaulay.*

*Démonstration.* Dans les notations de la proposition 2.9, posons  $\bar{\lambda} \in X(P)/\mathbb{Z}\Lambda \simeq \text{Cl}(N_P)$ . Comme  $\bar{\lambda}$  est torsion, on peut supposer en changeant au besoin le représentant  $\lambda$  de la classe que  $\lambda^n : P \rightarrow \mathbf{C}^\times$  est le morphisme identité pour un entier positif  $n$ . En particulier, l’image du caractère  $\lambda : P \rightarrow \mathbf{C}^\times$  est un sous-groupe cyclique et donc fini de  $\mathbf{C}^\times$ .

Soit  $P_e^\circ$  la composante connexe du centralisateur d’un élément de l’orbite nilpotente. Par des considérations de connexité, on doit avoir  $\lambda(P_e^\circ) = 1$ . Il est donc possible de factoriser la restriction de  $\lambda$  à  $P_e$ .

$$\begin{array}{ccc} P_e & \xrightarrow{\lambda} & \mathbf{C}^\times \\ & \searrow & \nearrow \\ & P_e/P_e^\circ & \end{array}$$

Considérons l’algèbre  $\mathbf{C}[G/P_e^\circ]$ . La projection  $G/P_e^\circ \rightarrow G/P_e$  donne un morphisme

$$\mathbf{C}[G/P_e] \simeq \mathbf{C}[G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}] \rightarrow \mathbf{C}[G/P_e^\circ]$$

et fait de  $\mathbf{C}[G/P_e^\circ]$  un  $\mathbf{C}[G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}]$ -module gradué avec  $G$ -action compatible. Le groupe fini  $\Gamma := P_e/P_e^\circ$  agit par automorphismes d’algèbres graduées commutant avec la  $G$ -action. On note que l’anneau d’invariants est

$$\mathbf{C}[G/P_e^\circ]^\Gamma = \mathbf{C}[G/P_e] \simeq \mathbf{C}[G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}].$$

En considérant  $\widetilde{\mathcal{N}} := \operatorname{Spec} \mathbf{C}[G/P_e^\circ]$ , on obtient un revêtement à  $|\Gamma|$  couches de  $N_D := \operatorname{Spec} \mathbf{C}[G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}]$ .

$$\begin{array}{ccccccc}
 G/P_e^\circ & \simeq & G\widehat{e} & \subset & \widetilde{\mathcal{N}} & := & \operatorname{Spec} \mathbf{C}[G/P_e^\circ] \\
 & & & & \downarrow \widehat{\mu} & & \\
 G/P_e & \simeq & G\widetilde{e} & \subset & N_D & := & \operatorname{Spec} \mathbf{C}[G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}] \\
 & & & & \downarrow \widetilde{\mu} & & \\
 G/G_e & \simeq & Ge & \subset & \mathcal{N} & & 
 \end{array}$$

Étant donné que ces deux recouvrements sont finis, les  $G$ -orbites de  $\widetilde{\mathcal{N}}$  sont de dimension paire. Il suit que l'algèbre  $\mathbf{C}[G/P_e^\circ]$  est un anneau normal et finiment engendré par respectivement le lemme 1.8 et le théorème 4.1 de [18]. Il est aussi Gorenstein et en particulier Cohen–Macaulay par un résultat obtenu indépendamment par Hinich [25] et Panyushev [36] et généralisé par Broer [8, 6.1].

Maintenant on peut revenir à  $H^0(G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\lambda))^{**}$ . Par le théorème 2.2, il existe un isomorphisme

$$H^0(G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\lambda))^{**} \simeq H^0(G\widehat{e}, \mathcal{L}_{G\widehat{e}}(\lambda)).$$

Ce module peut être décrit directement comme les applications régulières  $\Gamma$ -équivariantes

$$\operatorname{Hom}_\Gamma(G/P_e^\circ, \mathbf{C}_\lambda) \simeq (\mathbf{C}[G/P_e^\circ] \otimes \mathbf{C}_\lambda)^\Gamma.$$

Enfin, on considère la décomposition isotypique du module Cohen–Macaulay  $\mathbf{C}[G/P_e^\circ]$  pour l'action de  $\Gamma$ . On obtient ainsi que le module de covariants

$$(\mathbf{C}[G/P_e^\circ] \otimes \mathbf{C}_\lambda)^\Gamma \simeq H^0(G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\lambda))^{**}$$

est un facteur direct de  $\mathbf{C}[G/P_e^\circ]$  et on conclut qu'il est aussi Cohen–Macaulay.  $\square$

## 2.11 Quelques isomorphismes en cohomologie

Notre approche pour obtenir les représentants du groupe des classes lorsque le diagramme  $D$  est pair sera de considérer d'abord un poids antidominant  $\lambda \in X(P)$ . Dans ce cas, le  $\mathbf{C}[G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}]$ -module  $H^0(G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_\lambda)^*)$  est réflexif par le théorème 2.20.

Nous utilisons ensuite des isomorphismes en cohomologie pour obtenir un poids dominant  $\lambda^*$ , possiblement sur un autre parabolique  $P'$ , tel que

$$H^0(G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_\lambda)^*) \simeq H^0(G \times^{P'} \mathfrak{g}_{\geq 2}, \mathcal{L}_{G \times^{P'} \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_{\lambda^*})^*).$$

Cette section décrit les théorèmes d'isomorphismes permettant d'effectuer ce procédé.

Nous les regroupons en deux familles. Une première famille est étudiée en détail par Aschah-Coallier [1]. Ces isomorphismes sont construits dans le cas d'un diagramme de Dynkin pondéré *un seul deux* (USD), ce qui signifie que sa pondération est entièrement nulle à l'exception d'une unique racine simple  $\alpha$  telle que  $D(\alpha) = 2$ . Alternativement, un diagramme de Dynkin pondéré USD détermine un sous-groupe parabolique *maximal*. Dans ce cas, le théorème 2.26 permet de construire un isomorphisme en cohomologie s'il existe un  $P$ -covariant. Nous utiliserons aussi le théorème 2.24 qui permet d'alléger considérablement les hypothèses mais qui ne donne qu'un isomorphisme des groupes  $H^0$  plutôt que de tous les groupes de cohomologie  $H^i$  pour  $i \geq 0$ .

La deuxième famille d'isomorphismes provient des travaux de Sommers [41, 43, 42]. Il permet de construire des isomorphismes pour certains diagrammes de Dynkin pondérés USD qui n'admettent pas de  $P$ -covariant en modifiant le diagramme et donc le sous-groupe parabolique considéré. Nous donnons une preuve uniforme de ces isomorphismes au théorème 2.26.

Il sera extrêmement utile d'avoir une notation condensée pour noter les isomorphismes en cohomologie.

Étant donné deux diagrammes de Dynkin pondérés  $D_1$  et  $D_2$  et leurs constructions associées discutées à la sous-section 2.3. Pour des poids  $\lambda \in X(P^{D_1})$  et  $\mu \in X(P^{D_2})$ , on écrira simplement  $(D_1, \lambda) \sim (D_2, \mu)$  ou  $\lambda \sim \mu$  lorsqu'il existe un isomorphisme

$$H^i(G \times^{P^{D_1}} \mathfrak{g}_{\geq 2}^{D_1}, \mathcal{L}_{G \times^{P^{D_1}} \mathfrak{g}_{\geq 2}^{D_1}}(\mathbf{C}_\lambda)^*) \simeq H^i(G \times^{P^{D_2}} \mathfrak{g}_{\geq 2}^{D_2}, \mathcal{L}_{G \times^{P^{D_2}} \mathfrak{g}_{\geq 2}^{D_2}}(\mathbf{C}_\mu)^*)$$

pour tout  $i \geq 0$ .

Cette notation a comme désavantage de ne pas dénoter les sous-groupes paraboliques  $P^{D_1}$  et  $P^{D_2}$ . Pour remédier à cet inconvénient, nous utiliserons la même notation en présentant aussi les diagrammes de Dynkin pondérés et les poids dans les notations de la sous-section 2.3. Par exemple, nous démontrerons au théorème 2.26 qu'il existe un isomorphisme

$$\begin{array}{c} -1 \\ \bullet \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array} \sim \begin{array}{c} 1 \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \bullet \end{array}.$$

## 2. GROUPE DES CLASSES DES VARIÉTÉS NILPOTENTES

Comme autre variation de cette notation, nous considérerons fréquemment des isomorphismes qui n'impliquent que les groupes  $H^0$  plutôt que tous les groupes de cohomologie  $H^i$  pour  $i \geq 0$ . Nous indiquerons de tels isomorphismes à l'aide de la notation  $\lambda \sim^0 \mu$ .

**Théorème 2.24.** *Soit  $D$  un diagramme de Dynkin pondéré tel que l'effondrement  $G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2} \rightarrow G\mathfrak{g}_{\geq 2}$  soit génériquement fini. Supposons qu'il existe un  $P$ -covariant de  $f \in \mathbf{C}[\mathfrak{g}_{\geq 2}]$  de poids  $\mu \in X(P)$  et soit  $\lambda \in X(P)$  un poids tel que le  $\mathbf{C}[G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}]$ -module  $H^0(G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_{\lambda+\mu})^*)$  est réflexif.*

*Alors il existe un isomorphisme  $\lambda \sim^0 \lambda + \mu$ .*

*Démonstration.* La proposition 2.10 donne une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_{\lambda+\mu})^* \rightarrow \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_{\lambda})^* \rightarrow i_* \mathcal{L}_{G \times^P \mathcal{V}(f)}(\mathbf{C}_{\lambda})^* \rightarrow 0.$$

On considère ensuite la suite exacte longue en cohomologie sur  $G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow H^0(\mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_{\lambda+\mu})^*) & \rightarrow & H^0(\mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_{\lambda})^*) & \rightarrow & H^0(i_* \mathcal{L}_{G \times^P \mathcal{V}(f)}(\mathbf{C}_{\lambda})^*) & \dashrightarrow & \\ & & & & & & \\ \dashrightarrow & H^n(\mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_{\lambda+\mu})^*) & \rightarrow & H^n(\mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_{\lambda})^*) & \rightarrow & H^n(i_* \mathcal{L}_{G \times^P \mathcal{V}(f)}(\mathbf{C}_{\lambda})^*) & \end{array}$$

On obtient une morphisme injectif  $\phi : H^0(\mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_{\lambda+\mu})^*) \rightarrow H^0(\mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}}(\mathbf{C}_{\lambda})^*)$  où le premier module est réflexif et le deuxième est finiment engendré et sans torsion. On peut donc appliquer le théorème 2.3 pour conclure que tout idéal associé au conoyau est  $\{0\}$  ou un idéal de hauteur 1.

Étant donné que les orbites nilpotentes sont toutes de dimension paire, le support de  $H^0(i_* \mathcal{L}_{G \times^P \mathcal{V}(f)}(\mathbf{C}_{\mu})^*)$  dans  $N$  est de codimension au moins 2, et il en est de même pour le conoyau  $\text{coker } \phi$ . Avec le fait que le conoyau est finiment engendré, il suit qu'il s'agit d'un module *pseudo nul* [5, §7.4.4, prop. 9]. En particulier, l'ensemble des idéaux associés  $\text{Ass}(\text{coker } \phi)$  ne contienne aucun idéal de hauteur  $\leq 1$ .

En combinant les deux dernières remarques, on conclut que  $\text{Ass}(\text{coker } \phi)$  est vide et donc  $\text{coker } \phi = \{0\}$ .  $\square$

Dans le cas d'un diagramme USD, on peut utiliser les résultats de Ascah-Coallier [1] pour faire un peu mieux et rendre le poids dominant. Dans ce cas on obtient des isomorphismes pour tous les groupes de cohomologie plutôt que seulement pour  $H^0$ .



**Théorème 2.25.** Soit  $D$  un diagramme de Dynkin pondéré USD tel que  $D(\alpha_k) = 2$ . Supposons qu'il existe un covariant  $P^D$ -covariant de  $\mathbb{C}[\mathfrak{n}]$  de poids  $2\omega_k \in X(P^D)$ . Alors il existe un isomorphisme  $-\omega_k \sim \omega_k$ .

*Démonstration.* [1, 1.6.1]. □

Le prochain théorème regroupe une autre famille d'isomorphismes qui apparaissent dans le cas où le diagramme de Dynkin est symétrique. Ils viennent des travaux de Sommers [41, 43, 42]. Ils permettent de construire des isomorphismes pour certains diagrammes de Dynkin pondérés USD qui n'admettent pas de  $P$ -covariant en modifiant le diagramme de Dynkin pondéré et donc le sous-groupe parabolique considéré. Nous donnons une preuve uniforme de ces isomorphismes au théorème 2.26.

**Théorème 2.26.** Pour chacune des paires de diagrammes USD  $D_1$  et  $D_2$  et de poids  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  décrites ci-dessous, il existe un isomorphisme  $(D_1, \lambda_1) \sim^0 (D_2, \lambda_2)$  pour tout entier  $s \in \mathbb{Z}$

1. Posons  $n \geq 2$ . Soit  $D_1$  le diagramme de Dynkin USD de type  $A_n$  tel que  $D_1(\alpha_k) = 2$  et  $D_2$  le diagramme tel que  $D_2(\alpha_{n-k+1}) = 2$ . On suppose que  $k \neq n - k + 1$ .  
On pose  $\lambda_1 := -s\omega_k$  et  $\lambda_2 := s\omega_{n-k+1}$ .
2. Posons  $n = 2l + 1 \geq 3$  un entier impair. Soit  $D_1$  le diagramme de Dynkin USD de type  $D_n$  tel que  $D_1(\alpha_{n-1}) = 2$  et  $D_2$  le diagramme tel que  $D_2(\alpha_n) = 2$ .  
On pose  $\lambda_1 := -s\omega_{n-1}$  et  $\lambda_2 := s\omega_n$ .
3. Soit  $D_1$  le diagramme de Dynkin USD de type  $E_6$  tel que  $D_1(\alpha_1) = 2$  et  $D_2$  le diagramme tel que  $D_2(\alpha_6) = 2$ .  
On pose  $\lambda_1 := -s\omega_1$  et  $\lambda_2 := s\omega_6$ .
4. Soit  $D_1$  le diagramme de Dynkin USD de type  $E_6$  tel que  $D_1(\alpha_3) = 2$  et  $D_2$  le diagramme tel que  $D_2(\alpha_5) = 2$ .  
On pose  $\lambda_1 := -s\omega_3$  et  $\lambda_2 := s\omega_5$ .

À l'aide des notations condensées, ces isomorphismes prennent la forme suivante.

1. Si  $G$  est de type  $A_n$  pour  $n \geq 2$ ,

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccccc}
 & & -s & & & & \\
 & & \bullet & & & & \\
 \circ & \cdots & \circ & \cdots & \circ & \cdots & \circ \\
 & & \underbrace{\phantom{\bullet}}_{\alpha_k} & & & & 
 \end{array}
 \sim^0
 \begin{array}{ccccccc}
 & & s & & & & \\
 & & \bullet & & & & \\
 \circ & \cdots & \circ & \cdots & \circ & \cdots & \circ \\
 & & \underbrace{\phantom{\bullet}}_{\alpha_{n-k+1}} & & & & 
 \end{array}
 \end{array}$$

## 2. GROUPE DES CLASSES DES VARIÉTÉS NILPOTENTES

---

2. Si  $G$  est de type  $D_n$  pour  $n$  impair et  $n \geq 3$ ,

$$\begin{array}{c} \circ \cdots \circ \circ \circ \circ \\ \quad \quad \quad \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \quad \bullet \quad \bullet \end{array} \quad \sim 0 \quad \begin{array}{c} \circ \cdots \circ \circ \circ \circ \\ \quad \quad \quad \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \quad \bullet \quad \bullet \end{array} \quad \begin{array}{c} s \\ -s \end{array}.$$

3. Si  $G$  est de type  $E_6$ ,

$$\begin{array}{c} -s \\ \bullet \circ \circ \circ \circ \circ \circ \\ \quad \quad \quad \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \quad \bullet \quad \bullet \end{array} \quad \sim 0 \quad \begin{array}{c} s \\ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \bullet \end{array}.$$

4. Si  $G$  est de type  $E_6$ ,

$$\begin{array}{c} -s \\ \circ \bullet \circ \circ \circ \circ \circ \\ \quad \quad \quad \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \quad \bullet \quad \bullet \end{array} \quad \sim 0 \quad \begin{array}{c} s \\ \circ \circ \circ \circ \circ \bullet \end{array}.$$

*Démonstration.* Nous démontrons les quatre isomorphismes simultanément en utilisant essentiellement la même preuve. Dans tous les cas, nous utiliserons un diagramme pondéré intermédiaire notée  $D_m$  qui est donnée respectivement pour chacun des isomorphismes ci-dessous.

$$1. D_m := \begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \circ \cdots \circ \circ \circ \cdots \circ \circ \cdots \circ \end{array}$$

$$2. D_m := \begin{array}{c} 1 \\ \circ \cdots \circ \circ \circ \circ \\ \quad \quad \quad \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \quad \bullet \quad \bullet \end{array} \quad 1$$

$$3. D_m := \begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \\ \quad \quad \quad \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \quad \bullet \quad \bullet \end{array}.$$

$$4. D_m := \begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \\ \quad \quad \quad \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \quad \bullet \quad \bullet \end{array}.$$

Dans tous les cas, on note en consultant les tables de [11] que le diagramme de Dynkin pondéré  $D_m$  est officiel. On vérifie aussi qu'il existe dans tous les cas des égalités  $P^{D_m} = P^{D_1} \cap P^{D_2}$  et  $\mathfrak{n}^{D_m} = \mathfrak{n}^{D_1} \cap \mathfrak{n}^{D_2}$ .

La démonstration se divise en trois étapes. En omettant de noter les faisceaux des sections pour alléger l'écriture, nous démontrerons successivement les trois isomorphismes suivants. Leur composition établira ensuite le résultat souhaité.

$$1. H^0(G/P^{D_1}, \mathbf{C}[\mathfrak{n}^{D_1}] \otimes \lambda_1) \simeq H^0(G/P^{D_m}, \mathbf{C}[\mathfrak{n}^{D_m}] \otimes \lambda_1).$$

$$2. H^0(G/P^{D_m}, \mathbf{C}[\mathfrak{n}^{D_m}] \otimes \lambda_1) \simeq H^0(G/P^{D_m}, \mathbf{C}[\mathfrak{n}^{D_m}] \otimes \lambda_2).$$

$$3. H^0(G/P^{D_m}, \mathbf{C}[\mathfrak{n}^{D_m}] \otimes \lambda_2) \simeq H^0(G/P^{D_2}, \mathbf{C}[\mathfrak{n}^{D_2}] \otimes \lambda_2).$$

Pour le premier isomorphisme, l'inclusion  $P^{D_m} \subset P^{D_1}$  induit un morphisme de projection  $\nu : G/P^{D_m} \rightarrow G/P^{D_1}$ . La suite spectrale de Leray associée à ce morphisme et au faisceau  $\mathbf{C}[\mathfrak{n}^{D_m}] \otimes \lambda_1$  a comme deuxième page

$$E_2^{p,q} = H^p(G/P^{D_1}, \mathbf{R}^q \nu_* (\mathbf{C}[\mathfrak{n}^{D_m}] \otimes \mathbf{C}_{\lambda_1}^*))$$

et elle aboutit à

$$E_\infty^{p,q} = H^{p+q}(G/P^{D_m}, \mathbf{C}[\mathfrak{n}^{D_m}] \otimes \mathbf{C}_{\lambda_1}^*).$$

En utilisant les résultats de [20, III.8.1] et la formule de projection, on obtient l'isomorphisme suivant

$$\mathbf{R}^q \nu_* (\mathbf{C}[\mathfrak{n}^{D_m}] \otimes \mathbf{C}_{\lambda_1}^*) \simeq H^q(P^{D_1}/P^{D_m}, \mathbf{C}[\mathfrak{n}^{D_m}]) \otimes \mathbf{C}_{\lambda_1}^*.$$

Étant donné qu'on ne s'intéresse qu'à  $H^0$ , on peut immédiatement conclure qu'il existe un isomorphisme

$$H^0(G/P^{D_1}, H^0(P^{D_1}/P^{D_m}, \mathbf{C}[\mathfrak{n}^{D_m}]) \otimes \mathbf{C}_{\lambda_1}^*) \simeq H^0(G/P^{D_m}, \mathbf{C}[\mathfrak{n}^{D_m}] \otimes \mathbf{C}_{\lambda_1}^*).$$

Il suffira donc pour cette étape de démontrer que  $H^0(P^{D_1}/P^{D_m}, \mathbf{C}[\mathfrak{n}^{D_m}]) \simeq \mathbf{C}[\mathfrak{n}^{D_1}]$ . Nous le ferons en montrant que la restriction de l'application moment

$$\phi : P^{D_1} \times^{P^{D_m}} \mathfrak{n}^{D_m} \rightarrow P^{D_1} \mathfrak{n}^{D_m} \subset \mathfrak{n}^{D_1}$$

est birationnelle. En particulier,

$$H^0(P^{D_1}/P^{D_m}, \mathbf{C}[\mathfrak{n}^{D_m}]) \simeq \mathbf{C}[P^{D_1} \times^{P^{D_m}} \mathfrak{n}^{D_m}] \simeq \mathbf{C}[\mathfrak{n}^{D_1}].$$

En considérant les  $G$ -fibrés associés et les applications moments correspondantes, on obtient le diagramme commutatif suivant où  $N_{D_1}$  et  $N_{D_m}$  sont des variétés nilpotentes.

$$\begin{array}{ccc} G \times^{P^{D_1}} P^{D_1} \times^{P^{D_m}} \mathfrak{n}^{D_m} & \xrightarrow{\phi} & G \times^{P^{D_1}} \mathfrak{n}^{D_1} \\ \downarrow \mu_1 & & \downarrow \mu_m \\ N_{D_m} & \longrightarrow & N_{D_1} \end{array}$$

## 2. GROUPE DES CLASSES DES VARIÉTÉS NILPOTENTES

---

On note d'abord que  $G \times^{P^{D_1}} P^{D_1} \times^{P^{D_m}} \mathfrak{n}^{D_m} \simeq G \times^{P^{D_m}} \mathfrak{n}^{D_m}$ . Ensuite, vu l'inclusion  $\mathfrak{n}^{D_m} \subset \mathfrak{n}^{D_1}$ , on peut supposer que les variétés nilpotentes  $\mathcal{N}_1$  et  $\mathcal{N}_m$  sont les mêmes. Étant donné que  $D_m$  est un diagramme de Dynkin pondéré officiel, nous savons que  $\mu_m$  est birationnelle. Nous sommes donc dans une situation où la fonction birationnelle  $\mu_m$  se factorise par la composition de la fonction surjective  $\phi$  et la fonction génériquement finie  $\mu_1$ . On conclut que  $\mu_1$  est aussi birationnelle.

Des trois isomorphismes énumérés ci-dessus, nous avons maintenant démontré le premier. Le troisième se démontre de la même manière en substituant le diagramme  $D_2$  à  $D_1$ . Il ne reste donc qu'à démontrer que

$$H^0(G/P^{D_m}, \mathbf{C}[\mathfrak{n}^{D_m}] \otimes \lambda_1) \simeq H^0(G/P^{D_m}, \mathbf{C}[\mathfrak{n}^{D_m}] \otimes \lambda_2).$$

Pour ce faire, nous utiliserons pour chacun des cas l'existence d'un covariant approprié décrit ci-dessous.

1. **Type  $A_n$ .** Dans ce cas,  $\mathfrak{n}^{D_m}$  s'identifie aux matrices de la forme

$$M(A) := \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où  $A$  est une matrice arbitraire de taille  $k \times k$ . Le déterminant de la sous-matrice  $A$  donne un  $P^{D_m}$ -covariant irréductible de poids  $\omega_k + \omega_{n-k+1}$ .

2. **Type  $D_n$ ,  $n$  impair.** Posons

$$J := \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

et soit  $G$  le groupe spinoriel correspondant. L'algèbre  $\mathfrak{g}$  est alors constitué des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & U \end{pmatrix}$$

où  $U, X, Y$  et  $Z$  sont des sous-matrices  $n \times n$  telles que  $Y$  et  $Z$  sont antisymétriques et  $U = -X^T$ . Le sous-algèbre  $\mathfrak{n}^{D_m}$  s'identifie au sous-espace où les matrices  $X, Z$  et  $U$  sont nulles et où la première rangée et la dernière colonne de  $Y$  sont nulles. En effaçant cette rangée et cette colonne de la sous-matrice  $Y$ , nous obtenons une matrice antisymétrique de taille  $(n-1) \times (n-1)$ . On considère alors le covariant de poids  $\omega_{n-1} + \omega_n$  donné par le pfaffien de cette matrice qui consiste en la racine carrée du

déterminant. Sous l'hypothèse que  $n$  est impair, il s'agit d'un covariant irréductible et non nul.

3. **Type  $E_6$ .** Il est plus difficile de décrire concrètement les covariants utilisés dans une algèbre de Lie exceptionnelle. On trouvera néanmoins une description des covariants irréductibles dans [28]. Nous utiliserons les covariants irréductibles de poids respectivement  $\omega_1 + \omega_6$  et  $\omega_3 + \omega_5$  pour les isomorphismes (3) et (4).

Nous nous contenterons pour le reste de traiter du premier cas, les autres étant démontrés de la même manière. On peut supposer sans perte de généralité par symétrie que  $\lambda_1 = -s\omega_k$  avec  $k < n - k + 1$  et  $s > 0$ . On pose  $f : \mathfrak{n}^{P_{D_m}} \rightarrow \mathbf{C}_{s\omega_k + s\omega_{n-k+1}}$  pour la puissance  $s$  du covariant décrit ci-dessus. On note que son poids est de  $\lambda_2 - \lambda_1 = s\omega_k + s\omega_{n-k+1}$ . En dénotant  $\mathcal{V}(f) \subset \mathfrak{n}^{P_{D_m}}$  les zéros de  $f$  et  $i : G \times^P \mathcal{V}(f) \rightarrow G \times^{P_{D_m}} \mathfrak{n}^{P_{D_m}}$  le morphisme d'inclusion, la proposition 2.10 donne une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_{G \times^{P_{D_m}} \mathfrak{n}^{P_{D_m}}}(\mathbf{C}_{s\omega_k})^* \rightarrow \mathcal{L}_{G \times^{P_{D_m}} \mathfrak{n}^{P_{D_m}}}(\mathbf{C}_{-s\omega_{n-k+1}})^* \rightarrow i_* \mathcal{L}_{G \times^{P_{D_m}} \mathcal{V}(f)}(\mathbf{C}_{-s\omega_{n-k+1}})^* \rightarrow 0.$$

En considérant les premiers termes de la suite exacte longue en cohomologie, on obtient la suite exacte suivante.

$$0 \rightarrow H^0(\mathbf{C}_{s\omega_k}^*) \rightarrow H^0(\mathbf{C}_{-s\omega_{n-k+1}}^*) \rightarrow H^0(i_* \mathcal{L}_{G \times^{P_{D_m}} \mathcal{V}(f)}(\mathbf{C}_{-s\omega_{n-k+1}})^*)$$

Par le théorème 2.20, le module  $H^0(\mathbf{C}_{-s\omega_{n-k+1}}^*)$  est réflexif. Comme le support du module  $H^0(i_* \mathcal{L}_{G \times^{P_{D_m}} \mathcal{V}(f)}(\mathbf{C}_{-s\omega_{n-k+1}})^*)$  est de codimension au moins 2, on conclut par le théorème 2.2 que l'application du milieu est un isomorphisme.

□

*Remarque 2.27.* Dans le cas des trois premiers isomorphismes du théorème précédent, notre démonstration est essentiellement la même que dans la thèse de Ascah-Coallier [1]. Notre version diffère toutefois en ce que nous obtenons des isomorphismes pour  $H^0$  sans réelle restriction sur les poids, alors que la version de [1] obtient des isomorphismes pour tous les groupes de cohomologie  $H^i$  pour  $i \geq 0$  sous l'hypothèse que les poids respectent certaines bornes. Spécifiquement, pour les isomorphismes (1), (2) et (3) du théorème précédent, il existe un isomorphisme pour tous les groupes de cohomologie  $H^i$  dans la mesure où  $s$  est respectivement tel que

1.  $1 \leq s \leq n - 2k + 2$  dans le cas de  $A_n$ , où  $D_1(\alpha_k) = 2$  et  $k < \frac{n}{2}$ ;

2.  $1 \leq s \leq 3$  dans le cas de  $D_n$ ,  $n > 3$  impair ;
3.  $1 \leq s \leq 5$  dans le cas de  $E_6$  et  $D_1(\alpha_1) = 2$ .

## 2.12 Généralisation à des sous-diagrammes encadrés de deux

Dans les faits, nous n'utiliserons pas les isomorphismes de la section précédente directement sur des diagrammes USD. Nous les appliquerons plutôt sur des diagrammes qui contiennent des sous-diagrammes de la forme appropriée.

**Définition 2.28.** Soit deux diagrammes de Dynkin pondérés  $D_1$  et  $D_2$ . Pour chacun de ces diagrammes on notera pour  $k = 1, 2$ ,  $G_k$  le groupe simple et simplement connexe correspondant,  $\Delta_k := \{\alpha_1^k, \dots, \alpha_{r_k}^k\}$  les racines simples,  $(-, -)_k$  une forme bilinéaire invariante sous l'action du groupe de Weyl de  $G_k$  et  $\{\omega_1^k, \dots, \omega_{r_k}^k\}$  les poids fondamentaux.

Le diagramme  $D_1$  est un *sous-diagramme* de  $D_2$  s'il existe une injection  $\varphi : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$  vérifiant les deux propriétés suivantes :

1. Les pondérations sont  $\varphi$ -invariantes :  $D_2(\varphi(\alpha_i)) = D_1(\alpha_i)$  pour  $i = 1, \dots, r_{k_1}$  ;
2. Les formes bilinéaires sont  $\varphi$ -invariantes :  $(\varphi(\alpha_i), \varphi(\alpha_j))_2 = (\alpha_i, \alpha_j)_1$  pour  $i, j = 1, \dots, r_{k_1}$ .

Le sous-diagramme  $D_1$  de  $D_2$  est *encadré de deux* si  $D_2(\alpha) = 2$  pour toute racine simple  $\alpha \in \Delta_2 \setminus \varphi(\Delta_1)$  telle que  $(\alpha, \varphi(\beta))_2 \neq 0$  pour une racine simple  $\beta \in \Delta_1$

*Remarque 2.29.* Cette dernière définition est nommée en raison de son interprétation visuelle dans les diagrammes : si une racine du sous-diagramme  $D_1$  est connectée à une racine  $\alpha$  de  $D_2$  à l'extérieur du sous-diagramme, alors  $D(\alpha) = 2$ .

**Théorème 2.30.** Soit  $G_{\text{int}}$  un groupe simple et simplement connexe,  $D_1^{\text{int}}$  un diagramme de Dynkin pondéré du type de  $G_{\text{int}}$ ,  $P_{\text{int}}^1 := P_{D_1^{\text{int}}}^1$  et  $\lambda_1^{\text{int}} \in X(P_{\text{int}}^1)$ . On suppose qu'il existe par le théorème 2.26 ou le théorème 2.24 un isomorphisme obtenu à l'aide d'un covariant de poids  $\mu$

$$H^0(G_{\text{int}} \times_{P_{\text{int}}^{D_1}} \mathfrak{n}_{\text{int}}^{D_1}, \mathcal{L}(\mathbb{C}_{\lambda_1^{\text{int}}})^*) \simeq H^0(G_{\text{int}} \times_{P_{\text{int}}^{D_2}} \mathfrak{n}_{\text{int}}^{D_2}, \mathcal{L}(\mathbb{C}_{\lambda_2^{\text{int}}})^*)$$

où  $D_2$  est le diagramme prescrit par le théorème 2.26 ou 2.24 et  $\lambda_2^{\text{int}} = \lambda_1^{\text{int}} + \mu$ .

Soit  $G$  un groupe simple, simplement connexe et muni d'un ensemble de racines simples  $\Delta$ . Soit  $D_1$  et  $D_2$  deux diagrammes de Dynkin pondérés du type de  $G$  contenant respectivement les diagrammes  $D_1^{\text{int}}$  et  $D_2^{\text{int}}$  comme sous-diagrammes encadrés de deux. On suppose que les racines simples de  $D_1$  et de  $D_2$  correspondant aux racines simples de respectivement  $D_1^{\text{int}}$  et  $D_2^{\text{int}}$  coïncident ; on les notera  $\Delta_{\text{int}}$ . On suppose aussi que les diagrammes  $D_1$  et  $D_2$  coïncident pour les racines  $\Delta \setminus \Delta_{\text{int}}$ .

Étant donné l'inclusion des racines simples  $\Delta_{\text{int}} \subset \Delta$ , on peut se servir de l'expression du poids  $\mu$  de  $G_{\text{int}}$  comme combinaison des racines simples  $\mu = \sum_{\alpha_i \in \Delta_{\text{int}}} c_i \alpha_i$  pour voir  $\mu$  comme un poids de  $G$ . On considère enfin deux poids  $\lambda_1 \in X(P_1^D)$  et  $\lambda_2 \in X(P_2^D)$  tels que  $\lambda_2 - \lambda_1 = \mu$ .

Sous ces hypothèses, il existe un isomorphisme

$$H^0(G \times^{P^{D_1}} \mathfrak{n}^{D_1}, \mathcal{L}(\mathbf{C}_{\lambda_1})^*) \simeq H^0(G \times^{P^{D_2}} \mathfrak{n}^{D_2}, \mathcal{L}(\mathbf{C}_{\lambda_2})^*).$$

*Démonstration.* On commence par définir un cinquième diagramme  $D^{\text{ext}}$  du type du groupe  $G$  et dont la pondération est nulle pour les racines  $\Delta_{\text{int}}$  des sous-diagrammes et coïncide avec celle de  $D_1$  (et de  $D_2$ ) à l'extérieur du sous-diagramme, c'est-à-dire pour les racines simples  $\Delta \setminus \Delta_{\text{int}}$ . En construisant le sous-groupe parabolique  $P_{\text{ext}} := P^{D^{\text{ext}}}$  de  $G$ , on note que  $P^{D_1} \subset P_{\text{ext}}$ .

On construit la suite spectrale de Leray provenant du morphisme de projection  $p : G/P^{D_1} \rightarrow G/P_{\text{ext}}$  et du faisceau

$$\mathcal{L}_{G \times^{P^{D_1}} \mathfrak{n}^{D_1}}(\mathbf{C}_{\lambda_1})^* \simeq \mathcal{L}_{G/P^{D_1}}(\mathbf{C}[\mathfrak{n}^{D_1}] \otimes \mathbf{C}_{\lambda_1}^*).$$

La deuxième page est donnée par

$$E_2^{i,j} = H^i(G/P_{\text{ext}}, \mathbf{R}^j p_* \mathcal{L}_{G/P^{D_1}}(\mathbf{C}[\mathfrak{n}^{D_1}] \otimes \mathbf{C}_{\lambda_1}^*))$$

et elle aboutit à

$$E_{\infty}^{i,j} = H^{i+j}(G/P^{D_1}, \mathcal{L}_{G/P^{D_1}}(\mathbf{C}[\mathfrak{n}^{D_1}] \otimes \mathbf{C}_{\lambda_1}^*)).$$

On supprimera dorénavant les  $\mathcal{L}(-)^*$  pour alléger la présentation. Il suit de [20, III.8.1] que

$$\mathbf{R}^j p_*(\mathbf{C}[\mathfrak{n}^{D_1}] \otimes \mathbf{C}_{\lambda_1}^*) \simeq H^j(P_{\text{ext}}/P^{D_1}, \mathbf{C}[\mathfrak{n}^{D_1}] \otimes \mathbf{C}_{\lambda_1}^*)$$

Comme nous ne nous intéressons qu'à  $H^0$ , il sera suffisant de poser  $i = j = 0$  pour obtenir un isomorphisme

$$H^0(G/P^{D_1}, \mathbf{C}[\mathfrak{n}^{D_1}] \otimes \mathbf{C}_{\lambda_1}^*) \simeq H^0(G/P_{\text{ext}}, H^0(P_{\text{ext}}/P^{D_1}, \mathbf{C}[\mathfrak{n}^{D_1}] \otimes \mathbf{C}_{\lambda_1}^*)).$$

## 2. GROUPE DES CLASSES DES VARIÉTÉS NILPOTENTES

---

Par les mêmes arguments, nous avons l'isomorphisme correspondant pour le diagramme  $D_2$ . Il sera donc suffisant de démontrer que

$$H^0(P_{\text{ext}}/P^{D_1}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{D_1}] \otimes \mathbb{C}_{\lambda_1}^*) \simeq H^0(P_{\text{ext}}/P^{D_2}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{D_2}] \otimes \mathbb{C}_{\lambda_2}^*).$$

Pour obtenir cet isomorphisme, nous considérons les décompositions de Levi  $P_{\text{ext}} = LU$ . Nous pouvons décomposer davantage en utilisant les *groupes de racines*. Étant donné une racine  $\alpha \in \Phi$ , soit  $U_\alpha$  un sous-groupe  $T$ -stable de  $G$  et dont l'algèbre de Lie est  $\mathfrak{g}_\alpha$ . On peut alors séparer le facteur de Levi en se servant des groupes des racines à support dans  $\Delta_{\text{int}}$  :

$$L^{\text{int}} := \langle U_\alpha : D(\alpha) = 0 \text{ et } \text{supp } \alpha \subset \Delta_{\text{int}} \rangle.$$

En procédant similairement pour les sous-groupes extérieurs et sous-groupes paraboliques, on obtient un isomorphisme

$$P_{\text{ext}}/P^{D_1} \simeq L_{\text{int}} L_{\text{ext}} U_{\text{int}} U_{\text{ext}} / L_{\text{int}}^{D_1} L_{\text{ext}}^{D_1} U_{\text{int}}^{D_1} U_{\text{ext}}^{D_1}.$$

Ce quotient se simplifie en utilisant les propriétés suivantes :

1. Par construction,  $U_{\text{ext}} = U_{\text{ext}}^{D_1}$  ;
2. Par construction,  $U_{\text{int}} = 1$  ;
3. Étant donné que le sous-diagramme  $D_1$  est encadré de deux,  $[L_{\text{ext}}, U_{\text{int}}^{D_1}] \subset U_{\text{int}}^{D_1}$  ;
4. Par construction,  $L_{\text{ext}} = L_{\text{ext}}^D$ .

On conclut que

$$P_{\text{ext}}/P^{D_1} \simeq L_{\text{int}}/L_{\text{int}}^D U_{\text{int}}^D \simeq G_{\text{int}}/P_{\text{int}}^{D_1}.$$

On peut également séparer l'algèbre de Lie  $\mathfrak{n}^{D_1} = \mathfrak{n}_{\text{int}}^{D_1} \oplus \mathfrak{n}_{\text{ext}}^{D_1}$  et le poids  $\lambda_1 = \lambda_1^{\text{int}} + \lambda_1^{\text{ext}}$ . En utilisant ces décompositions, puis la formule de projection on obtient un isomorphisme

$$\begin{aligned} H^0(P_{\text{ext}}/P^{D_1}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{D_1}] \otimes \mathbb{C}_{\lambda_1}^*) &\simeq H^0(G_{\text{int}}/P_{\text{int}}^{D_1}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}_{\text{int}}^{D_1} \oplus \mathfrak{n}_{\text{ext}}^{D_1}] \otimes \mathbb{C}_{\lambda_1^{\text{int}} + \lambda_2^{\text{ext}}}^*) \\ &\simeq H^0(G_{\text{int}}/P_{\text{int}}^{D_1}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}_{\text{int}}^{D_1}] \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{n}_{\text{ext}}^{D_1}] \otimes \mathbb{C}_{\lambda_1^{\text{int}}}^* \otimes \mathbb{C}_{\lambda_2^{\text{ext}}}^*) \\ &\simeq H^0(G_{\text{int}}/P_{\text{int}}^{D_1}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}_{\text{int}}^{D_1}] \otimes \mathbb{C}_{\lambda_1^{\text{int}}} \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{n}_{\text{ext}}^{D_1}] \otimes \mathbb{C}_{\lambda_2^{\text{ext}}}^*). \end{aligned}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'utiliser l'isomorphisme

$$H^0(G_{\text{int}} \times_{P_{\text{int}}^{D_1}} \mathfrak{n}_{\text{int}}^{D_1}, \mathcal{L}(\mathbb{C}_{\lambda_1^{\text{int}}}^*)) \simeq H^0(G_{\text{int}} \times_{P_{\text{int}}^{D_2}} \mathfrak{n}_{\text{int}}^{D_2}, \mathcal{L}(\mathbb{C}_{\lambda_2^{\text{int}}}^*))$$



dont on supposait l'existence. En utilisant de plus les égalités  $\mathbf{C}[\mathfrak{n}^{D_1}] = \mathbf{C}[\mathfrak{n}^{D_2}]_{\text{ext}}$  et  $\lambda_1^{\text{ext}} = \lambda_2^{\text{ext}}$ , on obtient l'isomorphisme souhaité

$$\begin{aligned} H^0(P_{\text{ext}}/P^{D_1}, \mathbf{C}[\mathfrak{n}^{D_1}] \otimes \mathbf{C}_{\lambda_1}^*) &\simeq H^0(G_{\text{int}}/P_{\text{int}}^{D_1}, \mathbf{C}[\mathfrak{n}_{\text{int}}^{D_1}] \otimes \mathbf{C}_{\lambda_1^{\text{int}}}^*) \otimes \mathbf{C}[\mathfrak{n}^{D_1}]_{\text{ext}} \otimes \mathbf{C}_{\lambda_2^{\text{ext}}}^* \\ &\simeq H^0(G_{\text{int}}/P_{\text{int}}^{D_2}, \mathbf{C}[\mathfrak{n}_{\text{int}}^{D_2}] \otimes \mathbf{C}_{\lambda_2^{\text{int}}}^*) \otimes \mathbf{C}[\mathfrak{n}^{D_2}]_{\text{ext}} \otimes \mathbf{C}_{\lambda_2^{\text{ext}}}^* \\ &\simeq H^0(P_{\text{ext}}/P^{D_2}, \mathbf{C}[\mathfrak{n}^{D_2}] \otimes \mathbf{C}_{\lambda_2}^*). \end{aligned}$$

□

*Remarque 2.31.* La base des poids fondamentaux d'un diagramme et la base des poids fondamentaux d'un de ses sous-diagrammes ne coïncident pas nécessairement. Pour cette raison, on devra généralement réécrire les poids comme combinaison linéaire des racines simples afin d'utiliser les isomorphismes du théorème précédent.

*Exemple 2.32.* On considère le diagramme de type  $E_7$  et le poids  $\lambda$  donné dans la base des poids fondamentaux par  $\bullet \text{---} \overset{-1}{\underset{\circ}{\circ}} \text{---} \bullet \text{---} \circ \text{---} \circ$ . Nous allons utiliser 4 applications successives du théorème 2.30 pour montrer qu'il existe un poids dominant  $\lambda^*$  tel que  $\lambda \sim^0 \lambda^*$ . En consultant la ligne  $A_4$  de la table 8.7, on note qu'il s'agit à isomorphisme près de l'unique module réflexif non trivial pour cette orbite.

D'abord, on note que ce sous-diagramme admet un sous-diagramme encadré de deux de type  $D_6$  formé des racines  $\alpha_7, \alpha_6, \alpha_5, \alpha_4, \alpha_3$  et  $\alpha_2$ . En notant les poids en superposant le coefficient de  $\omega_i$  (ou de  $\alpha_i$ ) à sa position respective dans le diagramme de Dynkin, nous avons que le diagramme  $\circ \text{---} \circ \text{---} \bullet \text{---} \overset{\circ}{\underset{\circ}{\circ}}$  admet un covariant de poids

$$2\omega_3 = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{matrix} \right\}_{\omega} = \left\{ \begin{matrix} 2 & 4 & 6 & 6 & 6 \\ & & & & 6 \end{matrix} \right\}_{\alpha}.$$

Dans  $E_7$ , nous avons

$$\left\{ \begin{matrix} 0 & 6 & 6 & 6 & 4 & 2 \\ & & & & & 6 \end{matrix} \right\}_{\alpha} = \left\{ \begin{matrix} -3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{matrix} \right\}_{\omega}.$$

En appliquant le théorème 2.30, on obtient donc un isomorphisme

$$\bullet \text{---} \overset{-1}{\underset{\circ}{\circ}} \text{---} \bullet \text{---} \circ \text{---} \circ \sim^0 \bullet \text{---} \overset{-3}{\underset{\circ}{\circ}} \text{---} \overset{1}{\bullet} \text{---} \circ \text{---} \circ.$$

## 2. GROUPE DES CLASSES DES VARIÉTÉS NILPOTENTES

Deuxièmement, les quatre premières racines de ce nouveau diagramme forment un sous-diagramme encadré de deux de type  $A_4$ . Nous avons par le théorème 2.26 un isomorphisme

$$\begin{array}{c} -3 \\ \bullet - \circ - \circ - \circ \end{array} \sim^0 \begin{array}{c} 3 \\ \circ - \circ - \circ - \bullet \end{array} \text{ obtenu du covariant de } A_4 \text{ de poids}$$

$$\{3 \ 0 \ 0 \ 3\}_\omega = \{3 \ 3 \ 3 \ 3\}_\alpha.$$

Dans  $E_7$ , nous avons

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 3 & & \end{array} \right\}_\alpha = \left\{ \begin{array}{cccccc} 3 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ & & & 3 & & \end{array} \right\}_\omega$$

et on conclut qu'il existe un isomorphisme

$$\begin{array}{c} -3 \quad 1 \\ \bullet - \circ - \circ - \bullet \\ | \\ \circ \end{array} \sim^0 \begin{array}{c} -2 \\ \circ - \circ - \circ - \bullet \\ | \\ \bullet \quad 3 \end{array}.$$

Troisièmement, on utilise le même argument en se servant du diagramme encadré de deux de type  $A_6$  formé des racines  $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$  et  $\alpha_7$ . Nous avons les égalités

$$\{0 \ 0 \ 2 \ 2 \ 0 \ 0\}_\omega = \{2 \ 4 \ 6 \ 6 \ 4 \ 2\}_\alpha$$

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} 2 & 4 & 6 & 6 & 4 & 2 \\ & & & 0 & & \end{array} \right\}_\alpha = \left\{ \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ & & & -6 & & \end{array} \right\}_\omega$$

et en appliquant à nouveau le théorème 2.30, on obtient un isomorphisme

$$\begin{array}{c} -2 \\ \circ - \circ - \bullet - \circ - \circ \\ | \\ \bullet \quad 3 \end{array} \sim^0 \begin{array}{c} 2 \\ \circ - \circ - \bullet - \circ - \circ \\ | \\ \bullet \quad -3 \end{array}.$$

Enfin, on utilise le covariant de  $A_1$  de poids  $2\omega_1 = \alpha_1$ . Dans  $E_7$ ,  $\alpha_2 = 2\omega_2 - \omega_4$  de telle sorte qu'en appliquant deux fois le théorème 2.30, on obtient un isomorphisme

$$\begin{array}{c} 2 \\ \circ - \circ - \bullet - \circ - \circ \\ | \\ \bullet \quad -3 \end{array} \sim^0 \begin{array}{c} \circ - \circ - \bullet - \circ - \circ \\ | \\ \bullet \quad 1 \end{array}.$$

En combinant ces isomorphismes, on conclut qu'il existe un isomorphisme

$$\begin{array}{c} -1 \\ \bullet - \circ - \bullet - \circ - \circ \\ | \\ \circ \end{array} \sim^0 \begin{array}{c} \circ - \circ - \bullet - \circ - \circ \\ | \\ \bullet \quad 1 \end{array}.$$

## 2.12. Généralisation à des sous-diagrammes encadrés de deux

---

*Remarque 2.33.* Dans le dernier exemple, tous les isomorphismes à l'exception de la dernière étape respectent les conditions additionnelles de la remarque 2.27. En particulier, nous obtenons aussi un isomorphisme pour tous les groupes de cohomologie  $H^i$  pour  $i \geq 0$  :

$$\begin{array}{c} \bullet - \circ - \circ - \bullet - \circ - \circ \\ \quad \quad \quad \downarrow \\ \quad \quad \quad \circ \end{array} \overset{-1}{\sim} \begin{array}{c} \circ - \circ - \bullet - \circ - \circ - \circ \\ \quad \quad \quad \downarrow \\ \quad \quad \quad \bullet \end{array} \overset{2}{\sim} \begin{array}{c} \bullet - \circ - \circ - \bullet - \circ - \circ \\ \quad \quad \quad \downarrow \\ \quad \quad \quad \bullet \end{array} \overset{-3}{\sim} \begin{array}{c} \bullet - \circ - \circ - \bullet - \circ - \circ \\ \quad \quad \quad \downarrow \\ \quad \quad \quad \bullet \end{array} .$$



## Chapitre 3

# Groupe des classes et caractères des centralisateurs

Dans ce chapitre, nous calculons les groupes des classes de la normalisation de l'adhérence des orbites nilpotentes des groupes classiques. Pour ce faire, nous utiliserons le lemme 2.7 combiné avec la description explicite des stabilisateurs qui est disponible à partir de la classification des orbites nilpotentes à l'aide des partitions. Nous obtiendrons éventuellement ces résultats de façon indépendante et plus satisfaisante à l'aide des modules réflexifs. Les résultats de ce chapitre ont toutefois l'avantage de porter sur toutes les orbites nilpotentes alors que nous ne considérerons plus tard que les diagrammes pairs. Nous travaillerons avec les orbites nilpotentes ; on note cependant que pour de telles orbites, il existe un diagramme officiel tel que l'effondrement  $G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2} \rightarrow G\mathfrak{g}_{\geq 2}$  est birationnel.

Pour la classification des orbites nilpotentes à l'aide des partitions, on réfère à [13]. Pour ce qui est de la description des centralisateurs d'un élément d'une orbite nilpotente, il s'agit d'un résultat de Springer–Steinberg [44, IV.I] qui est aussi discuté dans [13, 3.7.3, 6.1.3]. Notre intention est d'utiliser le lemme 2.7 pour calculer les groupes de classes ; nous serons donc surtout intéressés aux centralisateurs d'un élément dans les groupes simplement connexes  $G_{\text{sc}}$ . Il sera toutefois commode de considérer d'abord d'autres groupes, nous donnons donc aussi les centralisateurs d'un élément dans les groupes adjoints  $G_{\text{ad}}$ .

Nous aurons besoin de quelques notations. D'abord, dans le cas où  $G$  est un groupe matriciel, nous noterons  $S(G)$  le sous-groupe de  $G$  des matrices de déterminant 1. Ensuite, n'importe quel groupe  $G$ , nous noterons par  $G_{\Delta}^n$ , le sous-groupe diagonal isomorphe à  $G$

dans la somme directe  $G^n$ .

*Exemple 3.1.* Par exemple dans le cas de  $G = \mathrm{GL}(n)$ , on a comme escompté que  $S(G) = \mathrm{SL}(n)$ . Cependant, même si  $G_\Delta^2$  est isomorphe à  $G$ , le groupe  $S(G_\Delta^2)$  est plus grand que  $\mathrm{SL}(n)$  et comprend les matrices de déterminant 1 ou  $-1$ .

**Proposition 3.2.** Soit  $d = [d_1^{r_1}, \dots, d_N^{r_N}]$  une partition où  $d_1 > \dots > d_N$  indexant une orbite nilpotente.

Soit  $R_d^{\mathrm{sc}}$  la partie réductive du centralisateur d'un élément de la  $G_{\mathrm{sc}}$ -orbite  $\mathcal{O}_d$  indexée par  $d$ . Similaire, soit  $R_d^{\mathrm{ad}}$  la partie réductive du centralisateur d'un élément de la  $G_{\mathrm{ad}}$ -orbite  $\mathcal{O}_d$  indexée par  $d$ .

Posons

$$C := S\left(\prod_{d_i \text{ impair}} \mathrm{O}(r_i)_\Delta^{d_i} \times \prod_{d_i \text{ pair}} \mathrm{Sp}(r_i)_\Delta^{d_i}\right).$$

Dans le cas où  $G = G_{\mathrm{sc}}$ ,

$$R_d^{\mathrm{sc}} \simeq \begin{cases} S(\prod (\mathrm{GL}(r_i)_\Delta^{d_i})) & \text{si } \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n; \\ \text{double recouvrement de } C & \text{si } \mathfrak{g} = \mathfrak{so}_n; \\ \prod_{d_i \text{ pair}} \mathrm{O}(r_i)_\Delta^{d_i} \times \prod_{d_i \text{ impair}} \mathrm{Sp}(r_i)_\Delta^{d_i} & \text{si } \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_n. \end{cases}$$

Dans le cas où  $G = G_{\mathrm{ad}}$

$$R_d^{\mathrm{ad}} \simeq \begin{cases} S(\prod (\mathrm{GL}(r_i)_\Delta^{d_i}) / \{\text{matrices scalaires de } \mathrm{SL}(n)\}) & \text{si } \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n; \\ C & \text{si } \mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}; \\ C / \{\pm I\} & \text{si } \mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}; \\ R_d^{\mathrm{sc}} / \{\pm I\} & \text{si } \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_n. \end{cases}$$

*Démonstration.* [13, 6.1.3]. □

### 3.1 Type A

Supposons d'abord que  $G$  est de type  $A_n$ . Alors  $G_{\mathrm{sc}} \simeq \mathrm{SL}(n+1)$  et les orbites nilpotentes sont indexées par toutes les partitions de  $n+1$ . Soit  $d = [d_1^{r_1}, \dots, d_N^{r_N}]$  une telle

partition,  $\mathcal{O}_d$  l'orbite nilpotente correspondante et  $R_d \simeq S(\prod \mathrm{GL}(r_i)_\Delta^{d_i})$  la partie réductive du centralisateur dans  $G_{\mathrm{sc}}$  d'un élément de  $\mathcal{O}_d$ . On pose aussi  $H := \prod \mathrm{GL}(r_i)_\Delta^{d_i}$ .

Le groupe de caractères de  $\mathrm{GL}(n)$  est cyclique et engendré par le déterminant. Il suit que  $X(H) = \mathbf{Z}^N$  où  $N$  est le nombre de parties distinctes de la partition et des générateurs sont donnés par le déterminant  $\det_i$  de chacun des blocs  $\mathrm{GL}(r_i)$ . Le groupe qui nous intéresse,  $R_d$ , est le noyau du déterminant de toute la matrice, on obtient donc une suite exacte

$$0 \rightarrow X(H/R_d) \rightarrow X(H) \rightarrow X(R_d) \rightarrow 0.$$

En notation additive, le déterminant de la matrice entière est donné par  $\sum_{i=1}^N d_i \det_i$ . Ce caractère et ses multiples sont les seuls qui se factorisent par le quotient  $X(H/R_d)$ .

On conclut que  $X(R_d)$  est le quotient de  $\mathbf{Z}^N$  par l'unique relation  $\sum_{i=1}^N d_i \det_i$ . En posant  $c := \mathrm{pgcd}\{d_1, \dots, d_n\}$ , les éléments de torsion du groupe des classes sont générés par le caractère

$$\frac{1}{c} \sum_{i=1}^N d_i \det_i$$

et  $X(R_d)$  est isomorphe à  $\mathbf{Z}^{N-1} \oplus \mathbf{Z}/c\mathbf{Z}$ .

## 3.2 Types $B$ et $D$

Soit  $G$  un groupe de type  $B_n$  ou  $D_n$ . Alors  $G_{\mathrm{sc}} \simeq \mathrm{Spin}(V)$  où  $V$  est un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire symétrique non singulière  $(-, -)$ . Nous supposons que  $V$  est de dimension au moins 3.

Nous rappelons brièvement quelques constructions liées aux groupes spinoriels. On consultera[40] pour plus de détails. L'algèbre de Clifford  $C(V)$  est un espace vectoriel muni d'une application linéaire  $p : V \rightarrow C(V)$  vérifiant les propriétés suivantes :

1.  $C(V)$  contient un élément identité noté 1 ;
2.  $C(V)$  est généré comme algèbre par  $p(V)$  et 1 ;
3.  $p(x)^2 = (x, x)1$  pour tout  $x \in V$  ;
4. Si  $(A', p')$  est une autre paire vérifiant les propriétés (1) à (3), alors il existe un morphisme d'algèbre  $f : C(V) \rightarrow A'$  tel que  $p' = f \circ p$  et  $f(1) = 1_{A'}$ .

On omet généralement d'écrire l'application  $p$  pour simplifier les notations.

### 3. GROUPE DES CLASSES ET CARACTÈRES DES CENTRALISATEURS

---

L'application linéaire définie sur  $V$  par  $x \mapsto -x$  s'étend par la propriété universelle à un automorphisme de  $C(V)$  appelé l'*automorphisme canonique* et noté par  $a \mapsto a'$ .

L'*algèbre de Clifford pair*  $C(V)^+$ , le *groupe de Clifford*  $G(V)$  et le *groupe de Clifford pair*  $G(V)^+$  sont respectivement définis par

$$\begin{aligned} C(V)^+ &:= \{a \in C(V) : a' = a\}; \\ G(V) &:= \{x \in C(V)^\times : xVx^{-1} = V\}; \\ G(V)^+ &:= G(V) \cap C(V)^+. \end{aligned}$$

Pour tout élément  $x \in G(V)$ , on définit l'application linéaire

$$\begin{aligned} \beta(x) &: V \rightarrow V \\ \beta(x)(v) &= xv x^{-1} \end{aligned}$$

Par [40, 3.6], l'image  $\beta(G(V))$  est contenue dans le groupe orthogonal  $O(V)$  et  $\beta : G(V)^+ \rightarrow SO(V)$  est un morphisme surjectif.

Tout vecteur non nul  $v \in V$  est contenu dans  $G(V)$  et l'application linéaire  $-\beta(v)$  est simplement la réflexion par rapport à  $v$ .

Enfin, on peut décrire les éléments du groupe de Clifford pair à l'aide du théorème suivant.

**Théorème 3.3.**  $G(V)^+$  est formé de tous les produits d'un nombre pair de vecteurs non nuls de  $V$ .

*Démonstration.* [40, 3.7] □

En particulier, étant donné  $x \in G(V)^+$ , on écrit  $x$  comme un produit non unique  $x = v_1 \dots v_{2n}$  et on considère  $\nu(x) = (v_1, v_1) \dots (v_{2n}, v_{2n})$ . Le groupe spinoriel est défini comme  $\text{Spin}(V) := \{x \in G(V)^+ : \nu(x) = 1\}$ . Il suit du théorème 3.3 que  $\text{Spin}(V)$  est formé de tous les produits  $v_1 \dots v_{2n}$  d'un nombre pair de vecteurs non nuls  $v_i \in V$  tels que  $(v_i, v_i) = 1$  pour  $1 \leq i \leq 2n$ .

Enfin, la restriction de l'application  $\beta$  au groupe spinoriel est encore un morphisme surjectif  $\beta : \text{Spin}(V) \rightarrow SO(V)$ .

Plutôt que de travailler directement avec les orbites nilpotentes, nous travaillerons avec les classes unipotentes en utilisant l'isomorphisme de Springer de la variété nilpotente vers



la variété unipotente  $\mathcal{U} \subset G_{\text{sc}}$ . Dans le cas d'un groupe de type  $B$  ou  $D$ , il s'agit d'un isomorphisme  $G_{\text{sc}}$ -équivariant. Il s'agit d'un résultat de [45] (voir aussi [4]). La motivation ici est d'utiliser la description des centralisateurs d'un élément donnée dans [35, §14].

Pour un groupe de type  $B_n$ , les classes unipotentes sont indexées par les partitions de  $2n+1$  où les parties paires ont une multiplicité paire. Pour un groupe de type  $D_n$ , les classes unipotentes sont indexées par les partitions de  $2n$  où les parties paires ont une multiplicité paire. Cependant dans ce cas, les partitions *very even* c'est-à-dire formées uniquement de parties paires, correspondent à deux classes unipotentes.

Dans tous les cas, étant donnée une partition  $d = [d_1^{r_1}, \dots, d_N^{r_N}]$ , considérons un élément  $g$  de la classe unipotente correspondante et soit  $\text{Spin}(V)_d$  la partie réductive du centralisateur de  $g$  dans  $\text{Spin}(V)$ .

En utilisant le morphisme  $\beta$  défini ci-haut, soit  $\beta(g) \in \text{SO}(V)$  et  $\text{SO}(V)_d$  la partie réductive de son centralisateur. Par la proposition 3.2, nous avons

$$\text{SO}(V)_d \simeq S\left(\prod_{d_i \text{ impair}} \text{O}(r_i)_{\Delta}^{d_i} \times \prod_{d_i \text{ pair}} \text{Sp}(r_i)_{\Delta}^{d_i}\right).$$

Le morphisme  $\beta : \text{Spin}(V) \rightarrow \text{SO}(V)$  se restreint à un morphisme des centralisateurs du même élément. Le noyau de l'une ou l'autre de ces applications est  $\{1, \epsilon\}$  où  $\epsilon$  est l'opposé de l'identité dans l'algèbre de Clifford [35]. On obtient ainsi une suite exacte

$$0 \rightarrow X(\text{SO}(V)_d) \rightarrow X(\text{Spin}(V)_d) \rightarrow X(\{1, \epsilon\}).$$

La proposition 3.4 montrera que dans la plupart des cas,  $\epsilon$  est un commutateur dans  $\text{Spin}(V)_d$  et donc, dans ce cas, la dernière application dans la suite exacte est triviale. On obtient ainsi un isomorphisme  $X(\text{Spin}(V)_d) \simeq X(\text{SO}(V)_d)$ . Nous calculerons ensuite  $X(\text{SO}(V)_d)$  à la proposition 3.6.

**Proposition 3.4.** *Soit*

$$V = \bigoplus_{d_i \text{ impair}} \left( \bigoplus_{j=1}^{d_i} V_{d_i, j} \right) \oplus V'$$

*une somme directe orthogonale obtenue de l'isomorphisme de*

$$\text{SO}(V)_d \simeq S\left(\prod_{d_i \text{ impair}} \text{O}(r_i)_{\Delta}^{d_i} \times \prod_{d_i \text{ pair}} \text{Sp}(r_i)_{\Delta}^{d_i}\right)$$

### 3. GROUPE DES CLASSES ET CARACTÈRES DES CENTRALISATEURS

de telle sorte que les groupes orthogonaux de  $\mathrm{SO}(V)_d$  agissent sur les sous-espaces  $V_{d_i,1}$  et ses copies sur les  $V_{d_i,j}$ .

Pour chaque sous-espace  $V_{d_i,j}$ , soit  $v_{d_i,j}^1, \dots, v_{d_i,j}^{r_i}$  une base orthonormée. S'il y a au moins 3 vecteurs de la forme  $v_{\star,1}^\star$ , alors  $\epsilon$  est un commutateur dans  $\mathrm{Spin}(V)_d$  et en particulier, il existe un isomorphisme  $X(\mathrm{Spin}(V)_d) \simeq X(\mathrm{SO}(V)_d)$ .

*Démonstration.* Soit  $v_{a_1,1}^{b_1}, v_{a_2,1}^{b_2}$  et  $v_{a_3,1}^{b_3}$  ces vecteurs et considérons les éléments suivants dans l'algèbre de Clifford :

$$\begin{aligned} x_1 &:= v_{a_1,1}^{b_1} \cdot v_{a_1,2}^{b_1} \cdots v_{a_1,d_{a_1}}^{b_1} \\ x_2 &:= v_{a_2,1}^{b_2} \cdot v_{a_2,2}^{b_2} \cdots v_{a_2,d_{a_2}}^{b_2} \\ x_3 &:= v_{a_3,1}^{b_3} \cdot v_{a_3,2}^{b_3} \cdots v_{a_3,d_{a_3}}^{b_3}. \end{aligned}$$

Alors  $x_1 x_2$  et  $x_1 x_3$  sont tous les deux dans  $\mathrm{Spin}(V)_d$  étant donné que  $\beta(x_1 x_2)$  et  $\beta(x_1 x_3)$  sont dans  $\mathrm{SO}(V)_d$  par construction.

Il suit de l'orthogonalité que pour des vecteurs distincts  $v_{i,j}^k$  et  $v_{i',j'}^{k'}$ , nous avons  $v_{i,j}^k v_{i',j'}^{k'} = \epsilon$  dans l'algèbre de Clifford. On peut ensuite calculer  $x_i^2$  en utilisant un *mélange parfait* [15].

$$x_i^2 := \epsilon_1 = \begin{cases} 1 & \text{si } d_{a_i} \equiv 1 \pmod{4} \\ \epsilon & \text{si } d_{a_i} \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

De plus, nous avons  $x_i x_j = \epsilon x_j x_i$  pour  $i \neq j$  étant donné que tous les facteurs peuvent être échangés à l'aide de  $d_{a_i} d_{a_j}$  transpositions.

Il ne reste plus qu'à démontrer par des calculs directement que peu importe les  $\epsilon_i$ ,

$$[x_1 x_2, x_1 x_3] = \epsilon.$$

Enfin, soit la suite exacte

$$0 \rightarrow X(\mathrm{SO}(V)_d) \rightarrow X(\mathrm{Spin}(V)_d) \rightarrow X(\{1, \epsilon\}).$$

Nous avons démontré que la dernière application est triviale et on conclut qu'il existe un isomorphisme  $X(\mathrm{SO}(V)_d) \simeq X(\mathrm{Spin}(V)_d)$ .  $\square$

*Exemple 3.5.* Soit  $d = [1^2, 3]$ . Alors une base pour

$$V = V_{1,1} \oplus V_{3,1} \oplus V_{3,2} \oplus V_{3,3}$$

est donnée par

$$v_{1,1}^1, v_{1,1}^2, v_{3,1}^1, v_{3,2}^1, v_{3,3}^1.$$

Les vecteurs  $v_{1,1}^1, v_{1,1}^2$  et  $v_{3,1}^1$  donnent 3 vecteurs de la forme  $v_{\star,1}^\star$ .

Nous avons ensuite

$$\begin{aligned} x_1 &:= v_{1,1}^1 \\ x_2 &:= v_{1,1}^2 \\ x_3 &:= v_{3,1}^1 v_{3,2}^1 v_{3,3}^1 \end{aligned}$$

qui sont tous leur propre inverse dans le groupe de Clifford.

Nous avons bien que  $\beta(x_1 x_2)$  et  $\beta(x_1 x_3)$  sont des éléments de  $\text{SO}(V)_d \simeq \mathcal{S}(\text{O}(2) \times \text{O}(1)_\Delta^3)$  :

$$\begin{aligned} \beta(x_1 x_2) &= \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}; \\ \beta(x_1 x_3) &= \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Enfin, on calcule

$$[x_1 x_2, x_1 x_3] = x_1 x_2 x_1 x_3 x_2 x_1 x_3 x_1 = e$$

en se servant des règles de commutation discutées dans la proposition.

**Proposition 3.6.** Soit  $d$  une partition indexant une orbite nilpotente en type  $B$  ou  $D$  et  $\text{SO}(V)_d$  le centralisateur d'un élément de cette orbite.

### 3. GROUPE DES CLASSES ET CARACTÈRES DES CENTRALISATEURS

---

1. Si une partition  $d$  ne contient aucune partie impaire, alors  $X(\mathrm{SO}(V)_d) \simeq 0$ ;
2. Si une partition  $d$  contient exactement une partie impaire et sa multiplicité est exactement 2, alors  $X(\mathrm{SO}(V)_d) \simeq \mathbf{Z}$ ;
3. Sinon  $X(\mathrm{SO}(V)_d) \simeq (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{a-1}$ , où  $a$  est le nombre de parties impaires dans la partition  $d$ .

*Démonstration.* Si la partition ne contient pas de partie impaire, alors  $\mathrm{SO}(V)_d$  est semi-simple et donc n'admet que le caractère trivial.

Si la partition contient exactement une partie impaire et que sa multiplicité est exactement 2, alors  $\mathrm{SO}(V)_d$  est le produit direct de  $\mathrm{SO}(2) \simeq \mathbf{C}^*$  et d'un groupe simple. Donc  $X(\mathrm{SO}(V)_d) \simeq X(\mathbf{C}^*) \simeq \mathbf{Z}$ .

Dans tous les autres cas, on considère la composante de l'identité  $\mathrm{SO}(V)_d^\circ \subset \mathrm{SO}(V)_d$  qui est isomorphe à

$$\mathrm{SO}(V)_d^\circ \simeq \prod_{d_i \text{ impair}} \mathrm{SO}(r_i)_{\Delta}^{d_i} \times \prod_{d_i \text{ pair}} \mathrm{Sp}(r_i)_{\Delta}^{d_i}.$$

L'inclusion  $\mathrm{SO}(V)_d^\circ \rightarrow \mathrm{SO}(V)_d$  donne une suite exacte

$$0 \rightarrow X(\mathrm{SO}(V)_d / \mathrm{SO}(V)_d^\circ) \rightarrow X(\mathrm{SO}(V)_d) \rightarrow X(\mathrm{SO}(V)_d^\circ).$$

Tout élément d'un facteur  $\mathrm{SO}(2)$  de  $\mathrm{SO}(V)_d^\circ$  peut s'écrire comme un commutateur dans  $\mathrm{SO}(V)_d$ . Il suit que la dernière application est triviale. On conclut en se servant de [13, 6.1.6] que

$$X(\mathrm{SO}(V)_d) \simeq X(\mathrm{SO}(V)_d / \mathrm{SO}(V)_d^\circ) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}^{a-1}.$$

□

On obtient ainsi l'isomorphisme désiré dans tous les cas sauf 4 cas spéciaux qui peuvent être réglés en utilisant les descriptions des centralisateurs de [35].

**Proposition 3.7.** *Soit une partition  $d = [d_1^{r_1}, d_2^{r_2}, \dots, d_N^{r_N}]$ , on suppose que  $a$  est le nombre de parties impaires et que la partition soit ordonnée de telle sorte que  $d_1$  à  $d_a$  sont impaires. Supposons que  $\sum_{i=1}^a r_i < 3$ , ce qui revient à dire que la partition ne vérifie pas la condition*

de la proposition 3.4. Nous avons alors un des isomorphismes suivants :

$$X(\text{Spin}(V)_d) = \begin{cases} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} & \text{si } a = 0; \\ \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} & \text{si } a = 1 \text{ et } d_1 = 1; \\ \mathbf{Z} & \text{si } a = 1 \text{ et } d_1 = 2; \\ \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} & \text{si } a = 2, r_1 = r_2 = 1 \text{ et } d_1 \equiv d_2 \pmod{4}; \\ (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2 & \text{si } a = 2, r_1 = r_2 = 1 \text{ et } d_1 \not\equiv d_2 \pmod{4}. \end{cases}$$

*Démonstration.* D'abord, si  $d$  n'a pas de partie impaire, il s'agit trivialement d'une partition *rather odd* c'est-à-dire que toutes les parties impaires ont une multiplicité impaire. Il suit que  $X(\text{Spin}(V)_d)$  est une extension centrale de  $X(\text{SO}(V)_d) \simeq 0$  par  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  et donc  $X(\text{Spin}(V)_d) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ .

Maintenant, supposons que  $d$  a exactement une partie de multiplicité exactement 1. La partition est encore *rather odd* et il suit que  $X(\text{Spin}(V)_d)$  est une extension centrale de  $X(\text{SO}(V)_d) \simeq 0$  par  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  et donc  $X(\text{Spin}(V)_d) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ .

Si  $d$  contient exactement une partie paire de multiplicité exactement 2, alors  $\text{Spin}(V)_d$  est un recouvrement à deux couches de  $\text{SO}(V)_d \simeq \mathbf{C}^*$ . Il suit que  $\text{Spin}(V)_d$  est isomorphe à  $\mathbf{C}^*$  et donc  $X(\text{Spin}(V)_d) \simeq \mathbf{Z}$ .

Finalement, on suppose que  $d$  contient exactement 2 parties impaires, chacune de multiplicité exactement 1. Il s'agit donc d'une partition *rather odd* et donc  $X(\text{Spin}(V)_d)$  est une extension centrale  $X(\text{SO}(V)_d) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  par  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ . Plus précisément, nous avons

$$X(\text{Spin}(V)_d) \simeq \begin{cases} \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} & \text{si } d_1 \equiv d_2 \pmod{4}; \\ (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2 & \text{si } d_1 \not\equiv d_2 \pmod{4}. \end{cases}$$

□

### 3.3 Type C

Soit  $G$  de type  $C_n$ . Alors  $G_{\text{sc}} \simeq \text{Sp}(2n)$  et les orbites nilpotentes sont indexées par les partitions de  $2n$  dans lesquelles les parties impaires ont une multiplicité paire. Soit  $d = [d_1^{r_1}, d_2^{r_2}, \dots, d_N^{r_N}]$  une telle partition. Soit  $\mathcal{O}_d$  l'orbite nilpotente correspondante et  $R_d$

la partie réductive du centralisateur dans  $G_{\text{sc}}$  d'un élément de l'orbite  $\mathcal{O}_d$ . Nous avons par la proposition 3.2

$$R_d \simeq \prod_{i \text{ impair}} \text{Sp}(r_i)_{\Delta}^{d_i} \times \prod_{i \text{ pair}} \text{O}(r_i)_{\Delta}^{d_i}.$$

Il suit immédiatement que  $X(R_d)$  est isomorphe à  $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^b$  où  $b$  est le nombre de parties paires dans  $d$ .

### 3.4 Groupes des classes

**Théorème 3.8.** *Soit  $\mathcal{O}_d$  une orbite nilpotente d'un groupe classique indexée par la partition  $d = [d_1^{r_1}, \dots, d_N^{r_N}]$  et soit les entiers :*

$a :=$  nombre de parties impaires;

$b :=$  nombre de parties paires;

$c := \text{pgcd}(d_1, \dots, d_N)$ .

*Les groupes des classes des orbites nilpotentes sont donnés par*

*Type  $A_n$  :*

$$\text{Cl}(\mathcal{O}_d) = \mathbf{Z}^{N-1} \oplus \mathbf{Z}/c\mathbf{Z}.$$

*Type  $B_n$  ou  $D_n$  :*

$$\text{Cl}(\mathcal{O}_d) = \begin{cases} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} & \text{si } a = 0; \\ \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} & \text{si } a = 1 \text{ et } d_1 = 1; \\ \mathbf{Z} & \text{si } a = 1 \text{ et } d_1 = 2; \\ \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} & \text{si } a = 2, r_1 = r_2 = 1 \text{ et } d_1 \equiv d_2 \pmod{4}; \\ \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} & \text{si } a = 2, r_1 = r_2 = 1 \text{ et } d_1 \not\equiv d_2 \pmod{4}; \\ (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2 & \text{si } a = 2, r_1 = r_2 = 1 \text{ et } d_1 \not\equiv d_2 \pmod{4}; \\ (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{a-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Type  $C_n$  :*

$$\text{Cl}(\mathcal{O}_d) = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^b.$$

*Remarque 3.9.* Des résultats partiels similaires sont publiés dans l'article [2]. Nos résultats contredisent cet article en type  $A$  et dans le cas où  $\text{Cl}(\mathcal{O}_d) \simeq \mathbf{Z}$  en type  $D$ . Une correction en ligne [3] réconcilie toutefois nos résultats en type  $A$ , mais pas pour le type  $D$ . Cette nouvelle version propose également de nouvelles formules pour les types  $B$ ,  $C$  et  $D$ . Toutefois, ces nouvelles formules ne réconcilient pas nos résultats en type  $D$  et diffèrent désormais de nos résultats en type  $B$ ,  $C$  et  $D$ .

Pour donner un exemple de ces différences, nous considérons le type  $D_4$  et l'orbite nilpotente correspondant à la partition  $d = [1^2, 3^2]$ . Les formules de [3] et du théorème 3.8 ci-haut donnent respectivement un groupe de Picard isomorphe à  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}^2$  et à  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ .

Cette partition correspondant au diagramme de Dynkin pondéré



Il s'agit d'un diagramme USD admettant un covariant de poids  $2\omega_2$  [1]. En particulier, on peut utiliser la proposition 2.9 pour obtenir à l'aide d'une approche différente que le groupe de Picard est effectivement isomorphe à  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ .





## Chapitre 4

# Représentants des groupes des classes : type $A$

Dans ce chapitre et les suivants, nous accomplirons notre principal objectif : étant donné un diagramme de Dynkin pondéré  $D$  approprié et un effondrement  $G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2} \rightarrow G\mathfrak{g}_{\geq 2}$ , nous donnons pour chacun des éléments du groupe des classes de la variété nilpotente  $N$  un représentant comme un  $\mathbf{C}[N]$ -module réflexif de rang 1 et de la forme  $H^0(G \times^{P'} \mathfrak{g}'_{\geq 2}, \mathcal{L}_{G \times^{P'} \mathfrak{g}'_{\geq 2}}(\mathbf{C}_\lambda)^*)$  où  $\lambda \in X(P')$  est un poids dominant et  $G \times^{P'} \mathfrak{g}'_{\geq 2} \rightarrow G\mathfrak{g}'_{\geq 2}$  un effondrement possiblement distinct de la même variété nilpotente  $N$ . Cet objectif sera atteint pour le type  $A$  à la section 4.5.

Contrairement au cas des groupes des autres types, nos méthodes s'appliquent pour toutes les orbites nilpotentes en type  $A$ . En effet plutôt que d'utiliser le diagramme de Dynkin pondéré officiel en imposant certaines restrictions, nous construisons un diagramme de Dynkin pondéré approprié. Plus précisément, la proposition 4.6 donne pour chaque orbite nilpotente  $\mathcal{O}$ , un diagramme de Dynkin pondéré  $D$  pair et un effondrement  $G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2} \rightarrow G\mathfrak{g}_{\geq 2}$  birationnel tel que  $G\mathfrak{g}_{\geq 2}$  est isomorphe à  $\overline{\mathcal{O}}$  et la variété nilpotente associée  $N$  est isomorphe à la normalisation  $\widetilde{\overline{\mathcal{O}}}$ . Dans le cas du type  $A$ , la distinction entre  $\overline{\mathcal{O}}$  et sa normalisation est en fait superflue étant donné que toutes les variétés nilpotentes sont normales [34].

Cette construction nous amène à considérer un système de représentants de *forme normale* (4.3). Nous prenons le temps de discuter en détail ces diagrammes et les méthodes permettant de les manipuler dans les sections 4.1, 4.3 et 2.11. Ce travail sera aussi utile dans les chapitres suivants étant donné que les diagrammes que nous utiliserons dans les

autres types pourront être séparés en deux sous-diagrammes dont un de type  $A$  et de *forme normale* au sens de la définition 4.3.

### 4.1 Diagramme de Dynkin pondéré de forme normale

Dans le cas des modules en type  $A$ , nous définissons une forme particulière de diagramme de Dynkin qui permettra d'identifier facilement certains covariants et d'utiliser les isomorphismes de la section 2.11.

**Définition 4.1.** Soit  $t \geq 0$  et  $l \geq 0$  des entiers. Un  $(t, l)$ -*bloc*, ou simplement un *bloc*, est le diagramme de Dynkin pondéré de type  $A_{lt+l+t}$  dont les poids sont donnés par

$$D(\alpha_i) := \begin{cases} 2 & \text{si } i \equiv 0 \pmod{t+1} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De façon plus imagée, un  $(t, l)$ -bloc est un diagramme formé de  $lt + l + t$  nœuds, où  $l$  de ces nœuds sont noirs et chacun de ces nœuds noirs est encadré à droite et à gauche par  $t$  nœuds blancs.

On appellera l'entier  $l$ , le nombre de nœuds noirs, la *longueur* du bloc et l'entier  $t$ , le nombre de nœuds blancs entre deux nœuds noirs adjacents, la *taille* du bloc.

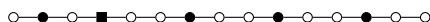
*Exemple 4.2.* La table 4.1 illustre les blocs de longueur et de taille inférieures ou égales à 3.



Taille	Longueur			
	0	1	2	3
0		●	●●	●●●
1	○	○●○	○●●○	○●●●○
2	○○	○○●○	○○●●○	○○●●●○
3	○○○	○○●○	○○●●○	○○●●●○

TABLE 4.1 –  $(t, l)$ -blocs pour  $0 \leq t, l \leq 3$ .

**Définition 4.3.** Un diagramme de Dynkin pondéré de type  $A$  est sous *forme de blocs* s'il est formé d'une suite de blocs de tailles distinctes où deux blocs consécutifs sont séparés par

*Exemple 4.4.* Le diagramme de Dynkin pondéré suivant est sous forme normale. Il est formé d'un  $(1, 1)$ -bloc, d'un séparateur et d'un  $(2, 3)$ -bloc.



- Un nœud carré (■) indique un séparateur ;
- Une arête courbe () indique un bloc, on utilisera aussi () pour préciser  $(t, l)$

- Nous considérerons fréquemment des blocs comme un sous-diagramme. Nous utiliserons alors un nœud gris (◉) pour indiquer soit un séparateur ou encore la fin du diagramme. Ces nœuds gris seront utiles pour noter comment des transformations effectuées sur un sous-diagramme affectent le reste du diagramme. Dans ce cas, on ajoutera additivement le coefficient indiqué à celui du nœud extérieur correspondant, s'il existe.

La classification habituelle des orbites nilpotentes de type  $A$  avec les diagrammes de Dynkin pondérés n'utilise pas les formes normales de la définition 4.3. Nous développons dans cette section une variation de cette classification afin d'associer un diagramme de Dynkin pondéré sous forme normale à chaque orbite nilpotente.

53

parties  $d_i$  de la partition  $d$ , de  $d_i$  vecteurs de base  $x_i^j$ ,  $j = 1, \dots, d_i$ . Soit aussi l'endomorphisme  $E_d$  de  $V$  donné par

$$E_d(x_i^j) = \begin{cases} x_i^{j-1} & \text{si } j > 1; \\ 0 & \text{si } j = 1. \end{cases}$$

En ordonnant les vecteurs  $\{x_i^j\}$  à l'aide de l'ordre lexicographique d'abord sur l'indice  $i$  puis sur l'indice  $j$ , on obtient une base de  $V$  :

$$x_1^1, \dots, x_1^{d_1}, x_2^1, \dots, x_2^{d_2}, \dots, x_k^1, \dots, x_k^{d_k}.$$

La matrice représentant l'endomorphisme  $E_d$  dans cette base est sous forme canonique de Jordan. En identifiant  $\mathfrak{g}$  à un sous-espace des endomorphismes de  $V$ , on obtient ainsi un représentant de chacune des orbites nilpotentes à partir d'une partition de  $n$ .

Afin d'obtenir un diagramme de Dynkin sous forme normale, nous modifions cette approche en réordonnant la base des  $\{x_j^i\}$  à l'aide de l'ordre lexicographique d'abord sur l'indice  $j$  et ensuite sur l'indice  $i$ . Il sera commode pour décrire  $e_d$  d'utiliser les partitions duales pour décrire cette nouvelle base. La partition duale de la partition  $d = [d_1, \dots, d_k]$  où  $d_1 \geq \dots \geq d_k$  est la partition  $d^* = [d_1^*, \dots, d_l^*]$  où  $l = d_1$  et  $d_i^* = \#\{j : d_j \geq i\}$ .

Avec ces notations, la base réordonnée est

$$x_1^1, \dots, x_{d_1^*}^1, x_1^2, \dots, x_{d_2^*}^2, \dots, x_1^l, \dots, x_{d_l^*}^l.$$

On définit un diagramme de Dynkin pondéré de type  $A_{n-1}$  en définissant d'abord  $\sigma_i := \sum_{k=1}^i d_k^*$  et en appliquant un poids de 2 aux racines  $\sigma_1, \dots, \sigma_{l-1}$  et un poids de 0 à toutes les autres racines. Soit aussi  $e_d$  la matrice de l'endomorphisme  $E_d$  dans la base réordonnée. Les principales propriétés du diagramme  $D$  et de la matrice  $e_d$  sont regroupées dans la proposition suivante.

**Proposition 4.6.** *Soit  $d = [d_1, \dots, d_k]$  où  $d_1 \geq \dots \geq d_k$  une partition de  $n$ ,  $d^* = [d_1^*, \dots, d_l^*]$  la partition duale et posons  $\sigma_p := \sum_{q=1}^p d_q^*$ .*

*Soit  $e_d$  la matrice nilpotente,  $D$  le diagramme de Dynkin pondéré décrit ci-haut et  $G \times^{P^D} \mathfrak{g}_{\geq 2}^D \rightarrow G \mathfrak{g}_{\geq 2}^D$  l'effondrement correspondant.*

1. *Les  $d_1^*$  premières colonnes de  $e_d$  sont nulles. Pour chacune des parties  $d_i^*$ ,  $i \geq 2$  de  $d^*$ , la matrice  $e_d$  contient une sous-matrice identité de taille  $d_i^* \times d_i^*$  occupant les*

lignes  $\sigma_{i-2} + 1$  à  $\sigma_{i-2} + d_i^*$  et les colonnes  $\sigma_{i-1} + 1$  à  $\sigma_i$ . Toutes les autres entrées de  $e_d$  sont nulles.

2. La matrice  $e_d$  est un élément de  $\mathfrak{g}_2$ .
3. Le diagramme de Dynkin pondéré  $D$  est sous forme normale.
4. La matrice  $e_d$  est un élément de Richardson  $\mathfrak{g}_{\geq 2}$ , c'est-à-dire que l'orbite  $Pe$  est dense dans  $\mathfrak{g}_{\geq 2}$  et  $P$  contient  $C_G(e_d)^\circ$ , la composante connexe de l'identité du centralisateur de  $e_d$ .
5. Le morphisme  $G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2} \rightarrow G\mathfrak{g}_{\geq 2}$  est birationnel et se restreint à un isomorphisme des orbites denses  $G[1, e]$  et  $Ge$ .

*Démonstration.* Pour (1), on peut explicitement décrire l'action de l'endomorphisme dans la nouvelle base. On note que les  $d_1^*$  premiers vecteurs de base sont  $x_1^1, \dots, x_{d_1^*}^1$  et comme  $E_d(x_j^1) = 0$  si  $j = 1$ , leurs images sont nulles. Pour  $i \geq 2$ , les vecteurs de base  $\sigma_{i-1} + 1$  à  $\sigma_i$  sont les vecteurs  $x_1^i, \dots, x_{d_i^*}^i$  et leurs images sont  $E_d(x_j^i) = x_j^{i-1}$ . Il s'agit des  $d_i^*$  premiers vecteurs parmi  $x_1^{i-1}, \dots, x_{d_{i-1}^*}^{i-1}$ , c'est-à-dire les vecteurs de base  $\sigma_{i-2} + 1$  à  $\sigma_{i-1} + d_i^*$ . La proposition (2) découle également de cette description.

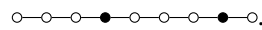
Pour (3), on réécrit la partition duale sous forme exponentielle  $d^* = [\delta_1^{e_1}, \dots, \delta_k^{e_k}]$  où  $\delta_1 > \dots > \delta_k$ . Pour chaque indice  $1 \leq i < k$ , on obtient un  $(\delta_i - 1, e_i - 1)$ -bloc suivi d'un séparateur. La dernière partie,  $\delta_k^{e_k}$ , contribue un  $(\delta_k - 1, e_k - 1)$ -bloc sans séparateur final.

Pour (4), il suffira par [24] de montrer que  $\dim Ge_d = 2 \dim(G/P)$ . Une description du centralisateur de  $e_d$  est un problème qui est discuté dans [44, IV.I]. On y donne une description explicite du centralisateur, en particulier de sa dimension qui est donnée par  $\dim Ge_d = n^2 - \sum_{k=1}^l (d_k^*)^2$ . D'un autre côté, la dimension de  $\mathfrak{g}_0$  est  $\sum_{k=1}^l (d_k^*)^2$  et le résultat suit.

Enfin, pour (5), la description du centralisateur de [44, IV.I] permet de conclure que  $C_G(e) \subset C_P(e)$  ce qui implique le résultat [38].

□

*Exemple 4.7.* Par exemple, considérons la partition  $d = [3, 3, 2, 2]$  de 10. La partition duale est  $d^* = [4, 4, 2]$  et donc le diagramme de Dynkin pondéré de forme normale associé à cette partition est



#### 4. REPRÉSENTANTS DES GROUPES DES CLASSES : TYPE A

Il est commode d'illustrer la base de  $\mathbf{C}^{10}$  à l'aide d'un diagramme de Young. On peut ainsi obtenir la base habituelle de la forme normale de Jordan en lisant la base ligne par ligne et notre base modifiée en lisant colonne par colonne.

$x_1^1$	$x_1^2$	$x_1^3$
$x_2^1$	$x_2^2$	$x_2^3$
$x_3^1$	$x_3^2$	
$x_4^1$	$x_4^2$	

La matrice de l'endomorphisme

$$E_d(x_i^j) = \begin{cases} x_i^{j-1} & \text{si } j > 1; \\ 0 & \text{si } j = 1. \end{cases}$$

dans la base  $x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1, x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2, x_1^3, x_2^3$  est la matrice suivante dans laquelle nous avons mis en évidence les sous-matrices identités de la proposition 4.6 ainsi que  $\mathfrak{g}_0$ .

$$e_d = \begin{pmatrix} \begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} & \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \\ \begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} & \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \end{pmatrix}$$

Enfin on note que  $e_d \in \mathfrak{g}_2$ .

### 4.3 Caractère sous forme normale

Nous décrivons ici certains caractères qui formeront après quelques restrictions additionnelles les représentants dominants des éléments du groupe des classes. Considérons un diagramme de Dynkin pondéré  $D$  et soit  $P$  un sous-groupe parabolique de  $G$  tel que  $\mathfrak{g}_{\geq 0}$

est son algèbre de Lie. Nous décrirons un caractère de  $P$  à l'aide du diagramme de Dynkin pondéré en superposant les coefficients du poids dans la base des poids fondamentaux au-dessus des racines correspondantes.

$$\begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

désigne  $\lambda = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3 \in X(P)$ .

**Définition 4.8.** Soit  $D$  un diagramme de Dynkin de forme normale au sens de la définition 4.3 avec l'effondrement correspondant  $G \times^{P^D} \mathfrak{g}_{\geq 2}^D \rightarrow G\mathfrak{g}_{\geq 2}^D$ . Soit un caractère  $\lambda \in X(P)$  écrit comme combinaison linéaire des poids fondamentaux  $\lambda = \sum \lambda_i \omega_i$ . Le caractère  $\lambda$  est sous *forme normale* si

1. le diagramme de Dynkin pondéré sous-jacent est sous forme normale ;
2. à l'intérieur de chacun des  $(l, t)$ -blocs, les coefficients  $\lambda_i$  sont tous nuls, à l'exception au plus un des nœuds dont le coefficient est 1 ;
3. sur chacun des séparateurs, le coefficient  $\lambda_i$  est arbitraire.

Dans les diagrammes condensés, nous indiquerons par  $\frown_1$  les blocs ayant un 1 et par  $\frown_0$  les blocs n'en ayant pas. Nous utiliserons aussi fréquemment le diagramme  $\frown_\epsilon$  où  $\epsilon \in 0, 1$  pour désigner l'un ou l'autre de ces blocs.

*Exemple 4.9.* Pour le diagramme de Dynkin pondéré de l'exemple 4.4, le caractère  $\lambda := 10\omega_4 + \omega_7$  est sous forme normale. Nous l'écrivons comme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 10 & & 1 & & 0 & & 0 \\ \circ & \bullet & \square & \circ & \bullet & \circ & \bullet & \circ & \circ \end{array}$$

ou encore comme

$$\begin{array}{c} 10 \\ \frown_0 \quad \square \quad \frown_1 \\ (1, 1) \quad (2, 3) \end{array}$$

## 4.4 Covariants et échange de blocs

En vertu de la proposition 4.6 et des résultats de la section 2.6, nous pouvons utiliser la caractéristique  $D$  de forme normale et les covariants de  $\mathfrak{g}_{\geq 2}$  pour étudier le groupe des classes

des orbites nilpotentes. Certains  $P$ -covariants sont faciles à construire : pour chaque paire de parties égales dans la partition duale, on obtient un covariant donné par le déterminant d'une sous-matrice. Par exemple, pour la partition de l'exemple 4.7, le déterminant de la sous-matrice occupant les lignes 1–4 et les colonnes 5–8 est un covariant. Nous montrerons à la section suivante que ces covariants ainsi que les isomorphismes de la section 2.11 sont suffisants pour décrire complètement le groupe des classes.

**Proposition 4.10.** *Soit  $d$  une partition de  $n$  et  $d^* = [d_1^*, \dots, d_l^*]$  la partition duale avec  $d_1^* \geq \dots \geq d_l^*$  et posons  $\sigma_i := \sum_{k=1}^i d_k^*$ . Soit  $D$  la caractéristique de forme normale associée à  $d$  construite à la proposition 4.6 et  $G \times^{P^D} \mathfrak{g}_{\geq 2}^D \rightarrow G \mathfrak{g}_{\geq 2}^D$  l'effondrement correspondant.*

*Si deux parties de  $d^*$  sont égales, c'est-à-dire si  $d_i^* = d_{i+1}^*$ , alors il existe un  $P$ -covariant de  $\mathbf{C}[\mathfrak{g}_{\geq 2}]$  de poids  $-\omega_{\sigma_{i-1}} + 2\omega_{\sigma_i} - \omega_{\sigma_{i+1}}$  donné par le déterminant de la sous-matrice occupant les lignes  $\sigma_{i-1} + 1$  à  $\sigma_i$  et les colonnes  $\sigma_i + 1$  à  $\sigma_{i+1}$ .*

*Démonstration.* Considérons une matrice de  $\mathfrak{g}_{\geq 2}$  et sa sous-matrice  $X$  occupant les lignes  $\sigma_{i-1} + 1$  à  $\sigma_i$  et les colonnes  $\sigma_i + 1$  à  $\sigma_{i+1}$ . La conjugaison par une matrice de  $P$  ne dépend que des blocs de la diagonale encadrant cette sous-matrice :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & C' \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & AXB^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En particulier, le déterminant de la sous-matrice après conjugaison est donné par

$$\det AXB^{-1} = \det A \det B^{-1} \cdot \det X.$$

□

Nous voulons maintenant utiliser le théorème 2.26 pour échanger des blocs. Nous utiliserons les notations de la section 2.11 pour décrire les isomorphismes  $\lambda \sim^0 \lambda'$ .

**Théorème 4.11.** *Soit  $D$  un diagramme de Dynkin pondéré ou un sous-diagramme de Dynkin pondéré formé d'un  $(t_1, l_1)$ -bloc, d'un séparateur et d'un  $(t_2, l_2)$ -bloc. On suppose que les*



blocs ont des tailles différentes c'est-à-dire que  $t_1 \neq t_2$  et que le poids du séparateur est  $x < 0$  et  $a, b \in \mathbf{Z}$ . Il existe des isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} a \quad x \quad b \\ \text{---} 0 \quad \bullet \quad 0 \text{---} \\ (t_1, l_1) \quad (t_2, l_2) \end{array} & \sim^0 & \begin{array}{c} a+x \quad -x \quad b+x \\ \text{---} 0 \quad \bullet \quad 0 \text{---} \\ (t_2, l_2) \quad (t_1, l_1) \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} a \quad x \quad b \\ \text{---} 1 \quad \bullet \quad 0 \text{---} \\ (t_1, l_1) \quad (t_2, l_2) \end{array} & \sim^0 & \begin{array}{c} a+x+1 \quad -x-1 \quad b+x \\ \text{---} 0 \quad \bullet \quad 1 \text{---} \\ (t_2, l_2) \quad (t_1, l_1) \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} a \quad x \quad b \\ \text{---} 0 \quad \bullet \quad 1 \text{---} \\ (t_1, l_1) \quad (t_2, l_2) \end{array} & \sim^0 & \begin{array}{c} a+x \quad -x-1 \quad b+x+1 \\ \text{---} 1 \quad \bullet \quad 0 \text{---} \\ (t_2, l_2) \quad (t_1, l_1) \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} a \quad x \quad b \\ \text{---} 1 \quad \bullet \quad 1 \text{---} \\ (t_1, l_1) \quad (t_2, l_2) \end{array} & \sim^0 & \begin{array}{c} a+x+1 \quad -x-2 \quad b+x+1 \\ \text{---} 1 \quad \bullet \quad 1 \text{---} \\ (t_2, l_2) \quad (t_1, l_1) \end{array}
 \end{array}$$

De plus, la position d'un éventuel 1 dans le  $(t_1, l_1)$ -bloc ou le  $(t_2, l_2)$ -bloc est conservée.

Dans tous les cas, si  $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \{0, 1\}$ , il existe l'isomorphisme suivant.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} a \quad x \quad b \\ \text{---} \epsilon_1 \quad \bullet \quad \epsilon_2 \text{---} \\ (t_1, l_1) \quad (t_2, l_2) \end{array} & \sim^0 & \begin{array}{c} a+x+\epsilon_1 \quad -x-\epsilon_2 \quad b+x+\epsilon_2 \\ \text{---} \epsilon_2 \quad \bullet \quad \epsilon_1 \text{---} \\ (t_2, l_2) \quad (t_1, l_1) \end{array}
 \end{array}$$

*Démonstration.* On considère un diagramme composé d'un bloc de longueur  $l_1 \geq 0$ , d'un séparateur et d'un bloc de longueur  $l_2 \geq 0$ . On démontre simultanément 4 isomorphismes par induction.

On suppose d'abord que  $l_1 = 0$ . Si  $l_2 = 0$ , la proposition se ramène au théorème 2.26. En procédant par induction sur  $l_2$ , on suppose que  $l_1 = 0$  et  $l_2 \geq 1$  et que les quatre isomorphismes existent si le deuxième bloc est de longueur inférieure à  $l_2$ . Dans ce cas, le  $(t_1, l_1)$ -bloc ne contient pas de 1 étant donné que  $t_1 = 0$  et donc il ne contient pas de nœuds noirs, ce qui laisse 3 cas à considérer.

1. le  $(t_2, l_2)$ -bloc ne contient pas de 1 ;
2. le  $(t_2, l_2)$ -bloc contient un 1 sur le premier nœud noir ;
3. le  $(t_2, l_2)$ -bloc contient un 1 sur tout autre nœud noir.

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{c} x \\ \text{---} 0 \text{---} \blacksquare \text{---} 0 \text{---} \\ (t_1, 0) \quad (t_2, l_2) \end{array} = \begin{array}{c} x \quad \quad 0 \\ \text{---} 0 \text{---} \blacksquare \text{---} 0 \text{---} \bullet \text{---} 0 \text{---} \\ (t_1, 0) \quad (t_2, 0) \quad (t_2, l_2 - 1) \end{array} \\
& \sim^0 \begin{array}{c} x \quad \quad -x \quad \quad x \\ \text{---} 0 \text{---} \blacksquare \text{---} 0 \text{---} \blacksquare \text{---} 0 \text{---} \\ (t_2, 0) \quad (t_1, 0) \quad (t_2, l_2 - 1) \end{array} \\
& \sim^0 \begin{array}{c} x \quad \quad 0 \quad \quad -x \quad \quad x \\ \text{---} 0 \text{---} \bullet \text{---} 0 \text{---} \blacksquare \text{---} 0 \text{---} \\ (t_2, 0) \quad (t_2, l_2 - 1) \quad (t_1, 0) \end{array} \\
& = \begin{array}{c} x \quad \quad -x \quad \quad x \\ \text{---} 0 \text{---} \blacksquare \text{---} 0 \text{---} \\ (t_2, l_2) \quad (t_1, 0) \end{array}
\end{aligned}$$

(cas 2) le  $(t_2, l_2)$ –bloc contient un 1 sur le premier nœud noir.

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} \text{○} \quad \text{○} \\ \text{0} \quad \text{1} \\ \text{(} t_1, 0 \text{)} \quad \text{(} t_2, l_2 \text{)} \end{array} \stackrel{x}{=} \begin{array}{c} \text{○} \quad \text{○} \quad \text{○} \quad \text{○} \\ \text{0} \quad \text{0} \quad \text{1} \quad \text{0} \\ \text{(} t_1, 0 \text{)} \quad \text{(} t_2, 0 \text{)} \quad \text{(} t_2, l_2 - 1 \text{)} \end{array} \\
 & \stackrel{\sim^0}{=} \begin{array}{c} \text{○} \quad \text{○} \quad \text{○} \quad \text{○} \\ \text{0} \quad \text{0} \quad \text{0} \quad \text{0} \\ \text{(} t_2, 0 \text{)} \quad \text{(} t_1, 0 \text{)} \quad \text{(} t_2, l_2 - 1 \text{)} \end{array} \begin{array}{c} x \\ -x \\ x+1 \end{array} \\
 & \stackrel{\sim^0}{=} \begin{array}{c} \text{○} \quad \text{○} \quad \text{○} \quad \text{○} \\ \text{0} \quad \text{1} \quad \text{0} \quad \text{0} \\ \text{(} t_2, 0 \text{)} \quad \text{(} t_2, l_2 - 1 \text{)} \quad \text{(} t_1, 0 \text{)} \end{array} \begin{array}{c} x \\ 1 \\ -x-1 \\ x+1 \end{array} \\
 & = \begin{array}{c} \text{○} \quad \text{○} \\ \text{1} \quad \text{0} \\ \text{(} t_2, l_2 \text{)} \quad \text{(} t_1, 0 \text{)} \end{array} \begin{array}{c} x \\ -x-1 \\ x+1 \end{array}
 \end{aligned}$$

(cas 3) le  $(t_2, l_2)$ –bloc contient un 1 sur tout autre nœud noir.

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} \text{○} \quad \text{○} \\ \text{0} \quad \text{1} \\ \text{(} t_1, 0 \text{)} \quad \text{(} t_2, l_2 \text{)} \end{array} \stackrel{x}{=} \begin{array}{c} \text{○} \quad \text{○} \quad \text{○} \quad \text{○} \\ \text{0} \quad \text{0} \quad \text{0} \quad \text{1} \\ \text{(} t_1, 0 \text{)} \quad \text{(} t_2, 0 \text{)} \quad \text{(} t_2, l_2 - 1 \text{)} \end{array} \begin{array}{c} x \\ 0 \end{array} \\
 & \stackrel{\sim^0}{=} \begin{array}{c} \text{○} \quad \text{○} \quad \text{○} \quad \text{○} \\ \text{0} \quad \text{0} \quad \text{0} \quad \text{1} \\ \text{(} t_2, 0 \text{)} \quad \text{(} t_1, 0 \text{)} \quad \text{(} t_2, l_2 - 1 \text{)} \end{array} \begin{array}{c} x \\ -x \\ x \end{array} \\
 & \stackrel{\sim^0}{=} \begin{array}{c} \text{○} \quad \text{○} \quad \text{○} \quad \text{○} \\ \text{0} \quad \text{0} \quad \text{1} \quad \text{0} \\ \text{(} t_2, 0 \text{)} \quad \text{(} t_2, l_2 - 1 \text{)} \quad \text{(} t_1, 0 \text{)} \end{array} \begin{array}{c} x \\ 0 \\ -x-1 \\ x+1 \end{array} \\
 & = \begin{array}{c} \text{○} \quad \text{○} \\ \text{1} \quad \text{0} \\ \text{(} t_2, l_2 \text{)} \quad \text{(} t_1, 0 \text{)} \end{array} \begin{array}{c} x \\ -x-1 \\ x+1 \end{array}
 \end{aligned}$$

On conclut que la proposition est vraie pour un  $(t_1, l_1)$ –bloc de longueur 0. En procédant maintenant par induction sur  $l_1$ , soit  $l_1 \geq 1$  et supposons que la proposition soit vraie lorsque

#### 4. REPRÉSENTANTS DES GROUPES DES CLASSES : TYPE A

---

le premier bloc est de longueur  $l_1 - 1$  et que le deuxième bloc est de longueur arbitraire. On considère alors 6 cas :

1. le  $(t_1, l_1)$ -bloc ne contient pas de 1 et le  $(t_2, l_2)$ -bloc ne contient pas de 1 ;
2. le  $(t_1, l_1)$ -bloc ne contient pas de 1 et le  $(t_2, l_2)$ -bloc contient un 1 ;
3. le  $(t_1, l_1)$ -bloc contient un 1 sur son dernier nœud noir et le  $(t_2, l_2)$ -bloc ne contient pas de 1 ;
4. le  $(t_1, l_1)$ -bloc contient un 1 sur son dernier nœud noir et le  $(t_2, l_2)$ -bloc contient un 1 ;
5. le  $(t_1, l_1)$ -bloc contient un 1 sur tout autre nœud noir et le  $(t_2, l_2)$ -bloc ne contient pas de 1 ;
6. le  $(t_1, l_1)$ -bloc contient un 1 sur tout autre nœud noir et le  $(t_2, l_2)$ -bloc contient un 1.

Tous ces cas sont démontrés de façon similaire en séparant le  $(t_1, l_1)$ -bloc en un  $(t_1, l_1 - 1)$ -bloc et un  $(t_1, 0)$ -bloc. Il suffit ensuite d'appliquer d'abord le cas particulier du présent théorème où la longueur du bloc de gauche est 0 et ensuite l'hypothèse d'induction.

(cas 1) le  $(t_1, l_1)$ -bloc ne contient pas de 1 et le  $(t_2, l_2)$ -bloc ne contient pas de 1.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \textcircled{\phantom{x}} \quad 0 \quad \blacksquare \quad 0 \quad \textcircled{\phantom{x}} \\ (t_1, l_1) \quad (t_2, l_2) \end{array} \quad = \quad \begin{array}{c} \textcircled{\phantom{x}} \quad 0 \quad \bullet \quad 0 \quad \blacksquare \quad 0 \quad \textcircled{\phantom{x}} \\ (t_1, l_1 - 1) \quad (t_1, 0) \quad (t_2, l_2) \end{array} \\
 \\
 \sim^0 \quad \begin{array}{c} \textcircled{\phantom{x}} \quad 0 \quad \blacksquare \quad 0 \quad \blacksquare \quad 0 \quad \textcircled{\phantom{x}} \\ (t_1, l_1 - 1) \quad (t_2, l_2) \quad (t_1, 0) \end{array} \\
 \\
 \sim^0 \quad \begin{array}{c} \textcircled{\phantom{x}} \quad 0 \quad \blacksquare \quad 0 \quad \bullet \quad 0 \quad \textcircled{\phantom{x}} \\ (t_2, l_2) \quad (t_1, l_1 - 1) \quad (t_1, 0) \end{array} \\
 \\
 = \quad \begin{array}{c} \textcircled{\phantom{x}} \quad 0 \quad \blacksquare \quad 0 \quad \textcircled{\phantom{x}} \\ (t_2, l_2) \quad (t_1, l_1) \end{array}
 \end{array}$$

(cas 2) le  $(t_1, l_1)$ -bloc ne contient pas de 1 et le  $(t_2, l_2)$ -bloc contient un 1.

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} \textcircled{\hspace{0.5em}} \quad \textcircled{\hspace{0.5em}} \\ \text{0} \quad \text{1} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ (t_1, l_1) \quad (t_2, l_2) \end{array} \quad \begin{array}{c} x \\ \blacksquare \end{array} = \begin{array}{c} \textcircled{\hspace{0.5em}} \quad \bullet \quad \textcircled{\hspace{0.5em}} \quad \textcircled{\hspace{0.5em}} \quad \textcircled{\hspace{0.5em}} \\ \text{0} \quad \text{0} \quad \text{0} \quad \text{1} \\ \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ (t_1, l_1 - 1) \quad (t_1, 0) \quad (t_2, l_2) \end{array} \\
 & \sim^0 \begin{array}{c} \textcircled{\hspace{0.5em}} \quad \textcircled{\hspace{0.5em}} \quad \textcircled{\hspace{0.5em}} \quad \textcircled{\hspace{0.5em}} \quad \textcircled{\hspace{0.5em}} \\ \text{0} \quad \text{1} \quad \text{1} \quad \text{0} \quad \text{0} \\ \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ (t_1, l_1 - 1) \quad (t_2, l_2) \quad (t_1, 0) \end{array} \quad \begin{array}{c} x \quad -x-1 \quad x+1 \\ \blacksquare \quad \blacksquare \end{array} \\
 & \sim^0 \begin{array}{c} \textcircled{\hspace{0.5em}} \quad \textcircled{\hspace{0.5em}} \quad \textcircled{\hspace{0.5em}} \quad \textcircled{\hspace{0.5em}} \quad \textcircled{\hspace{0.5em}} \\ \text{1} \quad \text{0} \quad \text{0} \quad \text{0} \quad \text{0} \\ \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ (t_2, l_2) \quad (t_1, l_1 - 1) \quad (t_1, 0) \end{array} \quad \begin{array}{c} x \quad -x-1 \quad 0 \quad x+1 \\ \blacksquare \quad \blacksquare \end{array} \\
 & = \begin{array}{c} \textcircled{\hspace{0.5em}} \quad \textcircled{\hspace{0.5em}} \quad \textcircled{\hspace{0.5em}} \\ \text{1} \quad \text{0} \quad \text{0} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ (t_2, l_2) \quad (t_1, l_1) \end{array} \quad \begin{array}{c} x \quad -x-1 \quad x+1 \\ \blacksquare \quad \blacksquare \end{array}
 \end{aligned}$$

(cas 3) le  $(t_1, l_1)$ -bloc contient un 1 sur son dernier nœud noir et le  $(t_2, l_2)$ -bloc ne contient pas de 1.

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} \textcircled{\hspace{0.5em}} \quad \textcircled{\hspace{0.5em}} \quad \textcircled{\hspace{0.5em}} \\ \text{1} \quad \text{0} \quad \text{0} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ (t_1, l_1) \quad (t_2, l_2) \end{array} \quad \begin{array}{c} x \\ \blacksquare \end{array} = \begin{array}{c} \textcircled{\hspace{0.5em}} \quad \bullet \quad \textcircled{\hspace{0.5em}} \quad \textcircled{\hspace{0.5em}} \quad \textcircled{\hspace{0.5em}} \\ \text{0} \quad \text{0} \quad \text{0} \quad \text{0} \quad \text{0} \\ \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ (t_1, l_1 - 1) \quad (t_1, 0) \quad (t_2, l_2) \end{array} \\
 & \sim^0 \begin{array}{c} \textcircled{\hspace{0.5em}} \quad \textcircled{\hspace{0.5em}} \quad \textcircled{\hspace{0.5em}} \quad \textcircled{\hspace{0.5em}} \quad \textcircled{\hspace{0.5em}} \\ \text{0} \quad \text{0} \quad \text{0} \quad \text{0} \quad \text{0} \\ \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ (t_1, l_1 - 1) \quad (t_2, l_2) \quad (t_1, 0) \end{array} \quad \begin{array}{c} x+1 \quad -x \quad x \\ \blacksquare \quad \blacksquare \end{array} \\
 & \sim^0 \begin{array}{c} \textcircled{\hspace{0.5em}} \quad \textcircled{\hspace{0.5em}} \quad \textcircled{\hspace{0.5em}} \quad \textcircled{\hspace{0.5em}} \quad \textcircled{\hspace{0.5em}} \\ \text{0} \quad \text{0} \quad \text{0} \quad \text{0} \quad \text{0} \\ \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ (t_2, l_2) \quad (t_1, l_1 - 1) \quad (t_1, 0) \end{array} \quad \begin{array}{c} x+1 \quad -x-1 \quad 1 \quad x \\ \blacksquare \quad \blacksquare \end{array} \\
 & = \begin{array}{c} \textcircled{\hspace{0.5em}} \quad \textcircled{\hspace{0.5em}} \quad \textcircled{\hspace{0.5em}} \\ \text{0} \quad \text{1} \quad \text{0} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ (t_2, l_2) \quad (t_1, l_1) \end{array} \quad \begin{array}{c} x+1 \quad -x-1 \quad x \\ \blacksquare \quad \blacksquare \end{array}
 \end{aligned}$$

(cas 4) le  $(t_1, l_1)$ -bloc contient un 1 sur son dernier nœud noir et le  $(t_2, l_2)$ -bloc contient





## 4.5 Représentants dominants

Dans cette section, nous obtenons les représentants dominants des éléments du groupe des classes pour un diagramme de type A. Nous procédons en deux étapes : dans un premier temps, nous construisons à la proposition 4.17 des représentants qui ne sont pas tout à fait dominants puisqu'ils peuvent contenir certaines formes que nous appellerons *blocs*

$\circ \overset{-1}{\underset{1}{\text{---}}} \circ$ . Le reste de la section est dédiée à discuter et éventuellement éliminer ce type de blocs.

**Lemme 4.13.** *Soit  $D$  un diagramme sous forme normale de type A formé d'un seul bloc et  $G \times^{P^D} \mathfrak{g}_{\geq 2}^D \rightarrow G \mathfrak{g}_{\geq 2}^D$  l'effondrement correspondant. On note  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  les racines telles que  $D(\alpha_i) = 2$ .*

*Soit  $\lambda$  un caractère antidominant de  $P^D$ , alors  $\lambda \sim^0 \lambda^*$  où  $\lambda^* \in X(P^D)$  est soit nul ou  $\omega_k$  pour un  $k = 1, \dots, n$ .*

*Le groupe des classes est isomorphe à  $\mathbf{Z}/(n+1)\mathbf{Z}$ . Il est généré par la classe d'isomorphisme du module  $H^0(G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}, \mathcal{L}(\mathbf{C}_{\omega_1})^*)^{**}$  et un isomorphisme explicite est obtenu en appliquant la classe d'isomorphisme du module  $H^0(G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2}, \mathcal{L}(\mathbf{C}_\lambda)^*)^{**}$  où  $\lambda := \sum_{i=1}^n \lambda_i \omega_i$  à*

$$\sum_{i=1}^n i \lambda_i + (n+1)\mathbf{Z} \in \mathbf{Z}/(n+1)\mathbf{Z}.$$

*Sous forme de diagramme, nous avons les isomorphismes suivants*

$$\begin{array}{c} \circ \text{---} \overset{\lambda_1}{\bullet} \text{---} \overset{\lambda_2}{\bullet} \text{---} \overset{\lambda_n}{\bullet} \text{---} \circ \\ \sim^0 \quad -\sum_{i=2}^n (i-1)\lambda_i \quad \sum_{i=1}^n i\lambda_i \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \sim^0 \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i + d - 1 + \delta_{0r} \quad \delta_{1r} \quad \delta_{2r} \quad \delta_{nr} \quad d \end{array}$$

*où  $d$  et  $r$  sont donnés par la division entière*

$$\sum_{i=1}^n i \lambda_i = d(n+1) + r, \quad 0 \leq r \leq n$$



et

$$\delta_{ir} := \begin{cases} 1 & \text{si } i = r; \\ 0 & \text{si } i \neq r. \end{cases}$$

*Démonstration.* La proposition 4.10 nous donne  $n$  covariants. Nous noterons leur poids  $\mu_1, \dots, \mu_n$  et il sera commode de les inscrire comme les colonnes de la matrice suivante dans la base des poids fondamentaux  $\omega_1, \dots, \omega_n$  correspondant aux racines noires.

$$R := \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Quoique l'objectif est d'obtenir un poids dominant, il est plus commode de commencer par obtenir un caractère plus négatif mais d'une forme plus simple.

Pour  $1 \leq k \leq n-1$ , nous considérons les covariants

$$\varrho_k := R \cdot (k, k-1, \dots, 2, 1, 0, \dots, 0)^T = (k+1, 0, \dots, 0, \overbrace{-1}^{\text{position } k+1}, 0, \dots, 0)_{\omega}^T.$$

Il existe un isomorphisme  $\lambda \sim^0 \lambda - \rho_k$  obtenu en appliquant le théorème 2.24 avec successivement les covariants  $\mu_{k-1}, \mu_{k-2}, \dots, \mu_1$  puis  $\mu_{k-2}, \mu_{k-3}, \dots, \mu_1$  et ainsi de suite.

Soustraire ainsi les covariants  $\varrho_k$  permet de faire en sorte que le seul poids non nul de  $\lambda$  soit celui de  $\omega_1$ . Plus précisément, si le poids original était  $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i \omega_i$ , nous obtenons que

$$\lambda \sim^0 \left( \sum_{i=1}^n i \lambda_i \right) \omega_1.$$

Il sera donc suffisant de considérer uniquement les caractères  $\lambda$  de la forme  $\lambda_1 \omega_1$ .

Maintenant on considère le covariant

$$\varrho_n := R \cdot (n, n-1, \dots, 2, 1) = (n+1, 0, \dots, 0)_{\omega}.$$

Dans la mesure où  $\lambda_1 \leq -n$ , il existe un isomorphisme  $\lambda \sim^0 \lambda + \varrho_n$  obtenu en appliquant 2.24 avec successivement les covariants  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  puis  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$  et ainsi de suite.

En répétant un nombre approprié de fois, on peut supposer que  $\lambda_1 \omega_1$  est tel que  $-n+1 \leq \lambda_1 \leq 1$ .

Si  $\lambda_1$  est 0 ou 1, nous avons obtenu la forme désirée. Sinon, nous avons  $\lambda_1 = -k$  pour un  $1 \leq k \leq n-1$  et nous considérons le covariant

$$\tau_k := R \cdot (k, \dots, k, k-1, \dots, 2, 1) = (k, 0, \dots, 0, \overbrace{1}^{\text{position } n-k+1}, 0, \dots, 0)_\omega.$$

Il existe un isomorphisme  $\lambda \sim^0 \lambda + \tau_k$  obtenu en appliquant 2.24 avec successivement les covariants  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  puis  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$  et ainsi de suite.  $\square$

*Remarque 4.14.* Le lemme précédent s'applique en particulier dans le cas de l'orbite régulière, c'est-à-dire lorsque  $P = B$  et donc tous les nœuds sont noirs. Dans ce cas, les poids des covariants irréductibles sont précisément les poids des racines. En particulier, le groupe des classes de l'orbite ou de la variété nilpotente correspondante est simplement le quotient du réseau des poids par le réseau des racines, c'est-à-dire le groupe fondamental. Il s'agit d'un calcul bien connu qui figure dans les planches de Bourbaki [6]. Les représentants obtenus sont précisément les poids *minuscules* qui sont effectivement les représentants du groupe fondamental dans les planches de Bourbaki. Cette situation est aussi discutée par Broer [9]. Le lemme précédent ne diffère que par la présence de nœuds blancs qui ne changent essentiellement rien.

Cette remarque permet de démontrer au théorème suivant que les caractères de forme normale forment un ensemble complet de représentants pour le groupe des classes.

**Théorème 4.15.** *Si  $N \subset \mathcal{N}$  est une variété nilpotente en type A. Cette variété est normale [34] et par le lemme 4.6, on peut supposer  $N \simeq G \times^{P^D} \mathfrak{g}_{\geq 2}^D$  pour un diagramme de forme normale  $D$  approprié.*

1. *Le groupe de classes  $\text{Cl}(N)$  est isomorphe à  $\mathbf{Z}^m \oplus \mathbf{Z}/c\mathbf{Z}$  où  $m$  est le nombre de séparateurs dans  $D$  et  $c := \text{pgcd}(l_1 - 1, \dots, l_N - 1)$  où  $l_i$  est la longueur du bloc  $i$  dans le diagramme  $D$ .*
2. *Si  $\lambda$  est de forme normale, alors  $H^0(N, \mathcal{L}_N(\lambda)^*)$  est réflexif de rang 1.*
3. *Si  $M$  est un  $\mathbf{C}[N]$ -module réflexif de rang 1, alors il existe un caractère de forme normale  $\lambda$  tel que  $M \simeq H^0(N, \mathcal{L}_N(\lambda)^*)$ .*

*Remarque 4.16.* Nous montrerons au théorème 4.22 qu'il existe aussi un diagramme  $D^\star$  et un poids *dominant*  $\lambda^\star$  tels que  $M \simeq H^0(G \times^{P^{D^\star}} \mathfrak{g}_{\geq 2}^{D^\star}, \mathcal{L}(\lambda^\star)^*)^{**} \simeq H^0(N, \mathcal{L}_N(\lambda^\star)^*)$ .

*Démonstration.* On considère la partition  $d = [d_1^{r_1}, \dots, d_N^{r_N}]$  correspondant au diagramme  $D$ . Nous avons déjà démontré à la section 3.1 que le groupe des classes est isomorphe à  $\mathbb{Z}^{N-1} \oplus \mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$  où  $c := \text{pgcd}(d_1, \dots, d_N)$ .

L'entier  $N$  est le nombre de parts distinctes dans la partition  $d$  ou de manière équivalente le nombre de parts distinctes dans la partition duale  $d^*$ . Par la proposition 4.6, le nombre de séparateurs est effectivement  $m = N - 1$ . Similairement, on note que  $c$  est aussi donné par le plus grand commun diviseur des exposants  $s_i$  de la partition duale. Par la proposition 4.6, nous avons  $s_i = l_i - 1$  ce qui démontre la première proposition.

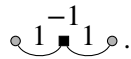
La deuxième proposition découle du lemme 4.13 en l'appliquant à chacun des blocs. Il suit aussi que les caractères de forme normale forment un système de représentants pour  $X(P)/\mathbb{Z}\Lambda'$  où  $\mathbb{Z}\Lambda'$  est le réseau engendré par les covariants de type déterminant de la proposition 4.10.

Pour la dernière proposition, nous avons par le théorème 2.9 un isomorphisme  $\text{Cl}(N) \simeq X(P)/\mathbb{Z}\Lambda$  où  $\mathbb{Z}\Lambda$  est le réseau engendré par les poids des covariants irréductibles. Étant donné que  $X(P)/\mathbb{Z}\Lambda'$  est isomorphe au groupe des classes obtenus en (1), on conclut que les caractères de forme normale forment un système de représentants pour le groupe des classes.  $\square$

**Proposition 4.17.** *Soit  $D$  un diagramme sous forme normale de type  $A$  et  $G \times^{P^D} \mathfrak{g}_{\geq 2}^D \rightarrow G\mathfrak{g}_{\geq 2}^D$  l'effondrement correspondant.*

*Soit  $\lambda$  un caractère antidominant de  $P^D$ . Il existe un diagramme  $\hat{D}$  et un poids  $\hat{\lambda} \in X(P^{\hat{D}})$  tel que  $\lambda \sim^0 \hat{\lambda}$  où  $\hat{\lambda}$  est sous forme de blocs et tous les séparateurs de  $\hat{\lambda}$  vérifient une ou l'autre des conditions suivantes :*

1. *le poids du séparateur est non négatif;*
2. *le poids du séparateur est exactement  $-1$  et les deux blocs adjacents existent et contiennent un poids de 1.*

*Dans ce dernier cas, on dira qu'il s'agit d'un bloc .*

*Démonstration.* On commence par appliquer le lemme 4.13 à chacun des blocs.

On procède ensuite par induction sur le nombre de séparateurs. Dans le cas où un diagramme ne contient qu'un seul séparateur, le résultat découle du théorème 4.11.

Ensuite on considère un diagramme à  $n > 1$  séparateurs où les  $n - 1$  premiers séparateurs sont tous positifs ou de la forme  $\circ \underset{\text{■}}{\overset{-1}{1}} 1 \circ$ . On démontre que dans ce cas, le diagramme est isomorphe à un diagramme où les  $n$  premiers séparateurs sont positifs ou de la forme  $\circ \underset{\text{■}}{\overset{-1}{1}} 1 \circ$ . Nous démontrerons aussi que, dans ce cas, un éventuel séparateur  $n + 1$  à la droite du diagramme portant un poids  $d_{n+1}$  dans le diagramme original aura un nouveau poids  $d'_{n+1}$  donné par les règles suivantes :

- Si le séparateur  $n$  est non négatif ou de la forme  $\circ \underset{\text{■}}{\overset{-1}{1}} 1 \circ$ ,  $d'_{n+1} = d_{n+1}$  ;
- Si le séparateur  $n$  est négatif, n'est pas de la forme  $\circ \underset{\text{■}}{\overset{-1}{1}} 1 \circ$  et que le bloc  $n + 1$  ne contient pas de 1,  $d'_{n+1} = d_{n+1} + d_n$  ;
- Si le séparateur  $n$  est négatif, n'est pas de la forme  $\circ \underset{\text{■}}{\overset{-1}{1}} 1 \circ$  et que le bloc  $n + 1$  contient un 1,  $d'_{n+1} = d_{n+1} + d_n + 1$ .

On procède en examinant les différents blocs possibles à la droite du diagramme. Soit  $d_n$  le poids du dernier séparateur. D'abord si  $d_n$  est non-négatif ou de la forme  $\circ \underset{\text{■}}{\overset{-1}{1}} 1 \circ$ , il n'y a rien à faire. Autrement, on a 4 cas à considérer :

1. les blocs  $n$  et  $n + 1$  ne contiennent pas de 1 ;
2. le bloc  $n$  ne contient pas de 1 et le bloc  $n + 1$  contient un 1 ;
3. le bloc  $n$  contient un 1 et le bloc  $n + 1$  ne contient pas de 1 ;
4. les blocs  $n$  et  $n + 1$  contiennent un 1.

(cas 1) les blocs  $n$  et  $n + 1$  ne contiennent pas de 1 et  $d_n < -1$ .

Au départ le diagramme est de la forme suivante avec les  $n - 2$  premiers séparateurs non négatifs ou de la forme  $\circ \underset{\text{■}}{\overset{-1}{1}} 1 \circ$ ,  $d_{n-1} \geq 0$  et  $d_n < 0$

$$\begin{array}{c} d_{n-1} \quad d_n \quad d_{n+1} \\ \text{---} \text{■} \quad 0 \quad \text{■} \quad 0 \quad \circ \end{array} .$$

En appliquant les règles de transformation, on obtient

$$\begin{array}{c} d_{n-1} \quad d_n \quad d_{n+1} \\ \text{---} \blacksquare \quad 0 \quad \blacksquare \quad 0 \quad \circ \end{array} \sim^0 \begin{array}{c} d_{n-1} + d_n \quad -d_n \quad d_{n+1} + d_n \\ \text{---} \blacksquare \quad 0 \quad \blacksquare \quad 0 \quad \circ \end{array} .$$

Si  $d_{n-1} + d_n \geq 0$ , le diagramme est de la forme désirée. Autrement, on peut appliquer l'hypothèse d'induction encore une fois sur les  $n - 1$  premiers séparateurs. Le poids du séparateur  $n$  devient alors  $-d_n + (d_{n-1} + d_n) = d_{n-1} \geq 0$ , comme désiré.

(cas 2) le bloc  $n$  ne contient pas de 1 et le bloc  $n + 1$  contient un 1.

Au départ le diagramme est de la forme suivante avec les  $n - 2$  premiers séparateurs non négatifs ou de la forme  $\circ \overset{-1}{1} \blacksquare 1 \circ$ ,  $d_{n-1} \geq 0$  et  $d_n < 0$

$$\begin{array}{c} d_{n-1} \quad d_n \quad d_{n+1} \\ \text{---} \blacksquare \quad 0 \quad \blacksquare \quad 1 \quad \circ \end{array} .$$

En appliquant les règles de transformation, on obtient

$$\begin{array}{c} d_{n-1} \quad d_n \quad d_{n+1} \\ \text{---} \blacksquare \quad 0 \quad \blacksquare \quad 1 \quad \circ \end{array} \sim^0 \begin{array}{c} d_{n-1} + d_n \quad -d_n - 1 \quad d_{n+1} + d_n + 1 \\ \text{---} \blacksquare \quad 1 \quad \blacksquare \quad 0 \quad \circ \end{array} .$$

Si  $d_{n-1} + d_n \geq 0$  ou si le séparateur  $n - 1$  est de la forme  $\circ \overset{-1}{1} \blacksquare 1 \circ$ , on a terminé. Effectivement, comme  $d_n < 0$ ,  $-d_n - 1 \geq 0$  comme désiré. Autrement, on peut appliquer l'hypothèse d'induction sur les  $n - 1$  premiers séparateurs. Le poids du séparateur  $n$  devient alors  $-d_n - 1 + (d_{n-1} + d_n) + 1 = d_{n-1} \geq 0$ , comme désiré.

(cas 3) le bloc  $n$  contient un 1 et le bloc  $n + 1$  ne contient pas de 1.

Au départ le diagramme est de la forme suivante avec les  $n - 1$  premiers séparateurs non négatifs ou de la forme  $\circ \overset{-1}{1} \blacksquare 1 \circ$  et  $d_n < 0$

$$\begin{array}{c} d_{n-1} \quad d_n \quad d_{n+1} \\ \text{---} \blacksquare \quad 1 \quad \blacksquare \quad 0 \quad \circ \end{array} .$$

En appliquant les règles de transformation, on obtient

$$\begin{array}{c} d_{n-1} \quad d_n \quad d_{n+1} \\ \text{---} \blacksquare \quad 1 \quad \blacksquare \quad 0 \quad \circ \end{array} \sim^0 \begin{array}{c} d_{n-1} + d_n + 1 \quad -d_n - 1 \quad d_{n+1} + d_n \\ \text{---} \blacksquare \quad 0 \quad \blacksquare \quad 1 \quad \circ \end{array} .$$



$$\begin{array}{c} d_{n-1} + d_n + 1 \quad -d_n - 2 \quad d_n + d_{n+1} + 1 \\ \text{---} \blacksquare \quad 1 \quad \blacksquare \quad 1 \quad \circ \end{array} \sim^0 \begin{array}{c} d'_{n-1} \quad d_{n-1} \quad d_n + d_{n+1} + 1 \\ \text{---} \blacksquare \quad \blacksquare \quad 1 \quad \circ \end{array}.$$

En particulier, si  $d_{n-1} \geq 0$  ou que le bloc  $n$  contient un 1, le diagramme est de la forme désirée. Sinon, on conclut que  $d_{n-1} = -1$  et que le bloc  $n$  ne contient pas de 1. Dans ce cas, on applique à nouveau les règles de transformation pour obtenir le diagramme suivant

$$\begin{array}{c} d'_{n-1} \quad -1 \quad d_n + d_{n+1} + 1 \\ \text{---} \blacksquare \quad 0 \quad \blacksquare \quad 1 \quad \circ \end{array} \sim^0 \begin{array}{c} d'_{n-1} - 1 \quad 0 \quad d_n + d_{n+1} + 1 \\ \text{---} \blacksquare \quad 1 \quad \blacksquare \quad 0 \quad \circ \end{array}.$$

Ce diagramme est de la forme souhaitée dans la mesure où  $d'_{n-1} \geq 1$ . Sinon,  $d'_{n-1} = 0$  et on applique une dernière fois l'hypothèse d'induction pour obtenir le résultat

$$\begin{array}{c} -1 \quad 0 \quad d_n + d_{n+1} + 1 \\ \text{---} \blacksquare \quad 1 \quad \blacksquare \quad 0 \quad \circ \end{array} \sim^0 \begin{array}{c} d''_{n-1} \quad 0 \quad d_n + d_{n+1} + 1 \\ \text{---} \blacksquare \quad \blacksquare \quad 0 \quad \circ \end{array}.$$

□

Il reste à discuter du cas des diagrammes  $\circ \overset{-1}{\blacksquare} 1 \circ$ . Quoique nous pourrions rendre un caractère de ce type dominant ou antidominant, il est à noter que le diagramme obtenu ne sera pas sous la forme de blocs de la définition 4.3. Spécifiquement, un tel diagramme contient plusieurs blocs de même taille et donc, les blocs ne sont plus arbitrairement échangeables.

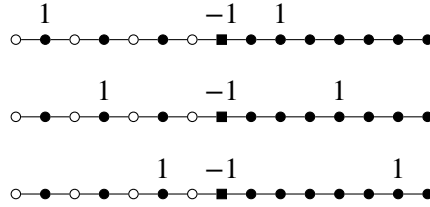
*Remarque 4.18.* Nous avons démontré à la section 3.1 que le groupe des classes de l'orbite correspondant à la partition  $d = [d_1^{r_1}, \dots, d_N^{r_N}]$  est isomorphe à  $\mathbf{Z}^{N-1} \oplus \mathbf{Z}/c\mathbf{Z}$  où  $c := \text{pgcd}\{d_1, \dots, d_N\}$ . On peut décrire les éléments torsions du groupe des classes avec les diagrammes pondérés que nous avons maintenant construits.

En notant  $d^* = [q_1^{s_1}, \dots, q_M^{s_M}]$  la partition duale, on note que  $c$  est aussi le plus grand commun diviseur des exposants  $s_i$  et donc le plus grand commun diviseur des  $l_i - 1$  où  $l_i$  est la longueur du bloc  $i$ . Avec chaque entier  $a_1$  tel que  $0 \leq a_1 < c$ , on peut construire inductivement un caractère  $\lambda$  d'ordre  $c$  dans  $\text{Cl}(N)$ . À l'intérieur du premier bloc, il ne peut y avoir un coefficient 1 que sur la  $\frac{l_1}{c}a_1$ -ème racine noire. Ce choix détermine le coefficient du séparateur et la position d'un 1 dans le deuxième bloc : on devra avoir pour  $a_1 \neq 0$ , un 1 sur le séparateur et un 1 en position  $\frac{l_2}{c}a_2$  où  $a_2$  est tel que le coefficient du séparateur de  $c\lambda$  soit  $c - (c - l_1a_1) - l_2a_2 = 0$ . En procédant bloc par bloc, on conclut que les éléments

#### 4. REPRÉSENTANTS DES GROUPES DES CLASSES : TYPE A

torsions sont des blocs ou des suites de blocs  $\circ \overset{-1}{1 \blacksquare 1} \circ$ . En particulier, il suit du théorème 2.23 que ces modules sont Cohen–Macaulay.

Par exemple, dans le cas de la partition duale  $d^* = [2^4, 1^8]$ , nous avons les éléments torsions non-nuls suivants :



Nous considérons séparément le cas d'un seul bloc  $\circ \overset{-1}{1 \blacksquare 1} \circ$  et celui de plusieurs  $\circ \overset{-1}{1 \blacksquare 1} \circ$  adjacents.

**Lemme 4.19.** *Soit  $D$  un diagramme sous forme normale de type A formé d'exactly 2 blocs de longueur non nulle.*

*Il existe un isomorphisme :*

$$\circ \overset{-1}{1 \blacksquare 1} \circ \sim^0 \circ \overset{0}{0} \overset{1}{0 \blacksquare 0} \overset{0}{0} \circ.$$

*Démonstration.* Il suffit de séparer les deux blocs au 1 et d'appliquer le théorème 4.11. En notant la taille des blocs  $t_1$  et  $t_2$ , on obtient :

$$\underset{t_1 \quad t_2}{\circ \overset{-1}{1 \blacksquare 1} \circ} = \underset{t_1 \quad t_1 \quad t_2 \quad t_2}{\circ \overset{1}{0} \overset{-1}{0 \blacksquare 0} \overset{1}{0} \circ} \sim^0 \underset{t_1 \quad t_2 \quad t_1 \quad t_2}{\circ \overset{0}{0} \overset{1}{0 \blacksquare 0} \overset{0}{0} \circ}.$$

□

**Lemme 4.20.** *Soit  $D$  un diagramme sous forme normale de type A formé d'exactly  $n$  blocs de longueur non nulle et de taille respective  $k_1, \dots, k_n$ .*



Il existe un isomorphisme :

$$\begin{array}{c}
 -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\
 \circ \text{---} 1 \text{---} \blacksquare \text{---} 1 \text{---} \blacksquare \text{---} \blacksquare \text{---} \blacksquare \text{---} 1 \text{---} \blacksquare \text{---} 1 \text{---} \circ \\
 k_1 \quad k_2 \quad \quad \quad k_{n-1} \quad k_n
 \end{array}
 \sim^0
 \begin{array}{c}
 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 \circ \text{---} 0 \text{---} \blacksquare \text{---} 0 \text{---} \blacksquare \text{---} \blacksquare \text{---} 0 \text{---} 0 \text{---} \blacksquare \text{---} \blacksquare \text{---} 0 \text{---} \blacksquare \text{---} 0 \text{---} \circ \\
 k_1 \quad k_2 \quad \quad k_n \quad k_1 \quad \quad k_{n-1} \quad k_n
 \end{array}
 .$$

*Démonstration.* On procède par induction sur le nombre de blocs. Le cas  $n = 2$  est le lemme 4.19. On considère donc un diagramme de la forme  $\circ \text{---} 1 \text{---} \overset{-1}{\blacksquare} \text{---} 1 \text{---} \circ$  à  $n > 2$  blocs et on sépare chacun des blocs au 1.

$$\begin{array}{c}
 -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\
 \circ \text{---} 1 \text{---} \blacksquare \text{---} 1 \text{---} \blacksquare \text{---} \blacksquare \text{---} \blacksquare \text{---} 1 \text{---} \blacksquare \text{---} 1 \text{---} \circ \\
 k_1 \quad k_2 \quad \quad \quad k_{n-1} \quad k_n
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \\
 \circ \text{---} 0 \text{---} \blacksquare \text{---} 0 \text{---} \blacksquare \text{---} \blacksquare \text{---} 0 \text{---} 0 \text{---} \blacksquare \text{---} \blacksquare \text{---} 0 \text{---} \blacksquare \text{---} 0 \text{---} \circ \\
 k_1 \quad k_1 \quad \quad \quad k_n \quad k_n
 \end{array}$$

On applique ensuite l'hypothèse d'induction à tous les blocs sauf les deux derniers.

$$\begin{array}{c}
 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \\
 \circ \text{---} 0 \text{---} \blacksquare \text{---} 0 \text{---} \blacksquare \text{---} \blacksquare \text{---} 0 \text{---} 0 \text{---} \blacksquare \text{---} \blacksquare \text{---} 0 \text{---} 0 \text{---} \blacksquare \text{---} 0 \text{---} \circ \\
 k_1 \quad k_2 \quad \quad k_{n-1} \quad k_1 \quad \quad k_{n-2} \quad k_{n-1} \quad k_n \quad k_n
 \end{array}$$

Enfin avec une suite d'échanges à partir de l'avant-dernier séparateur, on obtient le caractère désiré.

$$\begin{array}{c}
 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 \circ \text{---} 0 \text{---} \blacksquare \text{---} 0 \text{---} \blacksquare \text{---} \blacksquare \text{---} 0 \text{---} 0 \text{---} \blacksquare \text{---} \blacksquare \text{---} 0 \text{---} \circ \\
 k_1 \quad k_2 \quad \quad k_n \quad k_1 \quad \quad k_{n-1} \quad k_n
 \end{array}$$

□

*Exemple 4.21.* Comme exemple de la transformation précédente, considérons un diagramme

#### 4. REPRÉSENTANTS DES GROUPES DES CLASSES : TYPE A

de la forme  $\circ \overset{-1}{1} \circ$  formé d'un  $k_1$ -bloc, d'un  $k_2$ -bloc, d'un  $k_3$ -bloc et d'un  $k_4$ -bloc.

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} -1 \quad -1 \quad -1 \\ \circ \overset{1}{1} \circ \end{array} = \begin{array}{c} 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \\ \circ \overset{0}{0} \circ \overset{0}{0} \circ \overset{0}{0} \circ \overset{0}{0} \circ \overset{0}{0} \circ \overset{0}{0} \circ \end{array} \\
 & \quad \quad \quad \begin{array}{c} k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4 \end{array} \quad \quad \quad \begin{array}{c} k_1 \quad k_1 \quad k_2 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_3 \quad k_4 \quad k_4 \end{array} \\
 & \sim^0 \begin{array}{c} 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \\ \circ \overset{0}{0} \circ \overset{0}{0} \circ \overset{0}{0} \circ \overset{0}{0} \circ \overset{0}{0} \circ \overset{0}{0} \circ \end{array} \\
 & \quad \quad \quad \begin{array}{c} k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4 \quad k_4 \end{array} \\
 & \sim^0 \begin{array}{c} 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \\ \circ \overset{0}{0} \circ \overset{0}{0} \circ \overset{0}{0} \circ \overset{0}{0} \circ \overset{0}{0} \circ \overset{0}{0} \circ \end{array} \\
 & \quad \quad \quad \begin{array}{c} k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_1 \quad k_2 \quad k_4 \quad k_3 \quad k_4 \end{array} \\
 & \sim^0 \begin{array}{c} 0 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ \circ \overset{0}{0} \circ \overset{0}{0} \circ \overset{0}{0} \circ \overset{0}{0} \circ \overset{0}{0} \circ \overset{0}{0} \circ \end{array} \\
 & \quad \quad \quad \begin{array}{c} k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_1 \quad k_4 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4 \end{array} \\
 & \sim^0 \begin{array}{c} 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \circ \overset{0}{0} \circ \overset{0}{0} \circ \overset{0}{0} \circ \overset{0}{0} \circ \overset{0}{0} \circ \overset{0}{0} \circ \end{array} \\
 & \quad \quad \quad \begin{array}{c} k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4 \quad k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4 \end{array}
 \end{aligned}$$

La dernière proposition permet d'obtenir les représentants dominants des éléments du groupe des classes en appliquant la procédure à tous les blocs  $\circ \overset{-1}{1} \circ$  du caractère obtenu de la proposition 4.17.

**Théorème 4.22.** *Soit  $D$  un diagramme sous forme normale de type A. Soit  $\lambda$  un caractère antidominant de  $P^D$ . Il existe un diagramme  $D^*$  et un poids  $\lambda^* \in X(P^{D^*})$  tel que  $\lambda \sim^0 \lambda^*$  et  $\lambda^*$  est dominant.*

*Le caractère  $\lambda^*$  est sous forme de blocs à l'exception de blocs de la forme*

$$\begin{array}{c} 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \circ \overset{0}{0} \circ \overset{0}{0} \circ \overset{0}{0} \circ \overset{0}{0} \circ \overset{0}{0} \circ \overset{0}{0} \circ \end{array}$$

$k_1 \quad k_2 \quad \quad \quad k_n \quad k_1 \quad k_2 \quad \quad \quad k_n$

*où la taille des deux blocs de longueur  $k_i$  est identique ; certaines tailles peuvent donc être répétées exactement deux fois.*

## 4.6 Représentants antidominants

Dans l'objectif de démontrer que chaque caractère dominant  $\lambda^*$  du théorème 4.22 est un représentant d'un élément du groupe des classes, nous donnons pour chacune d'entre elles un caractère antidominant  $\lambda^-$  tel que  $\lambda^* \sim^0 \lambda^-$ .

**Lemme 4.23.** *Soit  $D$  un diagramme sous forme normale de type  $A$ .*

*Soit  $\lambda$  un caractère de  $P^D$  qui est soit sous forme normale ou de la forme du théorème 4.22. Il existe un isomorphisme :*

$$\lambda = \begin{array}{c} \lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_{k-1} \quad \lambda_k \\ \circ \quad \epsilon_1 \quad \blacksquare \quad \epsilon_2 \quad \blacksquare \quad \dots \quad \blacksquare \quad \epsilon_k \quad \blacksquare \quad \epsilon_{k+1} \quad \circ \end{array}$$

$$\sim^0 \begin{array}{c} \lambda_1 + \epsilon_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \dots \quad \lambda_k \quad \mu \quad \mu' \\ \circ \quad \epsilon_2 \quad \blacksquare \quad \epsilon_3 \quad \blacksquare \quad \dots \quad \blacksquare \quad \epsilon_{k+1} \quad \blacksquare \quad \epsilon_1 \quad \circ \end{array}$$

où

$$\mu := - \sum_{i=1}^k \lambda_i - \sum_{i=1}^{k+1} \epsilon_i$$

$$\mu' := \sum_{i=1}^k \lambda_i + \sum_{i=2}^{k+1} \epsilon_i$$

*Démonstration.* On procède par induction sur le nombre de séparateurs. S'il n'y a qu'un séparateur et que les deux blocs ne sont pas de même taille, le lemme se ramène au théorème 4.11 :

$$\begin{array}{c} \lambda_1 \\ \circ \quad \epsilon_1 \quad \blacksquare \quad \epsilon_2 \quad \circ \end{array} \sim^0 \begin{array}{c} \lambda_1 + \epsilon_1 \quad -\lambda_1 - \epsilon_1 - \epsilon_2 \quad \lambda_1 + \epsilon_2 \\ \circ \quad \epsilon_2 \quad \blacksquare \quad \epsilon_1 \quad \circ \end{array}.$$

Si les deux blocs sont de même taille, le diagramme est de la forme particulière décrite au théorème 4.22 et le lemme se ramène à l'un des deux isomorphismes suivants.

1. L'isomorphisme suivant qui découle du théorème 2.24 :

$$\begin{array}{c} -1 \\ \circ \quad 0 \quad \bullet \quad 0 \quad \circ \\ (t_1, l_1) \quad (t_2, l_2) \end{array} \sim^0 \begin{array}{c} -1 \quad 1 \quad -1 \\ \circ \quad 0 \quad \bullet \quad 0 \quad \circ \\ (t_2, l_2) \quad (t_1, l_1) \end{array}$$

#### 4. REPRÉSENTANTS DES GROUPES DES CLASSES : TYPE A

2. L'isomorphisme suivant qui est en fait une égalité :

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} 0 \\ \circ \quad 0 \quad \bullet \quad 0 \quad \circ \\ (t_1, l_1) \quad (t_2, l_2) \end{array} & \sim^0 & \begin{array}{c} 0 \quad 0 \quad 0 \\ \circ \quad 0 \quad \bullet \quad 0 \quad \circ \\ (t_2, l_2) \quad (t_1, l_1) \end{array} \end{array}$$

S'il y a  $k + 1 > 1$  séparateurs, on applique d'abord l'hypothèse d'induction aux  $k$  premiers séparateurs et ensuite le théorème 4.11 au dernier séparateur :

$$\begin{array}{l} \lambda = \begin{array}{c} \lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_{k-1} \quad \lambda_k \quad \lambda_{k+1} \\ \circ \quad \epsilon_1 \quad \blacksquare \quad \epsilon_2 \quad \blacksquare \quad \cdots \quad \blacksquare \quad \epsilon_k \quad \blacksquare \quad \epsilon_{k+1} \quad \blacksquare \quad \epsilon_{k+2} \quad \circ \end{array} \\ \sim^0 \begin{array}{c} \lambda_1 + \epsilon_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \lambda_k \quad \mu \quad \lambda_{k+1} + \mu' \\ \circ \quad \epsilon_2 \quad \blacksquare \quad \epsilon_3 \quad \blacksquare \quad \cdots \quad \blacksquare \quad \epsilon_{k+1} \quad \blacksquare \quad \epsilon_1 \quad \blacksquare \quad \epsilon_{k+2} \quad \circ \end{array} \\ \sim^0 \begin{array}{c} \lambda_1 + \epsilon_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \lambda_k \quad \nu \quad \nu' \quad \nu'' \\ \circ \quad \epsilon_2 \quad \blacksquare \quad \epsilon_3 \quad \blacksquare \quad \cdots \quad \blacksquare \quad \epsilon_{k+1} \quad \blacksquare \quad \epsilon_{k+2} \quad \blacksquare \quad \epsilon_1 \quad \blacksquare \quad \epsilon_{k+2} \quad \circ \end{array} \end{array}$$

où nous avons comme désiré

$$\begin{aligned} \nu &= \mu + \lambda_{k+1} + \mu' + \epsilon_1 = \lambda_{k+1} \\ \nu' &= -\lambda_{k+1} - \mu' - \epsilon_1 - \epsilon_{k+2} = -\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i - \sum_{i=1}^{k+2} \epsilon_i \\ \nu'' &= \lambda_{k+1} + \mu' + \epsilon_{k+2} = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i + \sum_{i=2}^{k+2} \epsilon_i. \end{aligned}$$

□

**Proposition 4.24.** Soit  $D$  un diagramme sous forme normale de type A.

Soit  $\lambda$  un caractère de  $P^D$  qui est soit sous forme normale ou de la forme du théorème 4.22. Il existe un isomorphisme :

$$\begin{array}{l} \lambda = \begin{array}{c} \lambda_1 \quad \lambda_{k-1} \quad \lambda_k \quad \lambda_{k+1} \quad \lambda_n \\ \circ \quad \epsilon_1 \quad \blacksquare \quad \cdots \quad \blacksquare \quad \epsilon_k \quad \blacksquare \quad \epsilon_{k+1} \quad \blacksquare \quad \cdots \quad \blacksquare \quad \epsilon_{n+1} \quad \circ \end{array} \\ \sim^0 \begin{array}{c} \mu \quad \lambda'_n \quad \lambda'_{n-k+2} \quad \lambda'_{n-k+1} \quad \lambda'_{n-k} \quad \lambda'_1 \quad \mu' \\ \circ \quad \epsilon_{n+1} \quad \blacksquare \quad \cdots \quad \blacksquare \quad \epsilon_{n-k+2} \quad \blacksquare \quad \epsilon_{n-k+1} \quad \blacksquare \quad \cdots \quad \blacksquare \quad \epsilon_1 \quad \blacksquare \quad \epsilon_{n+1} \quad \circ \end{array} \end{array}$$

où

$$\begin{aligned}\mu &:= \sum_{i=1}^n \epsilon_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i \\ \mu' &:= \sum_{i=2}^{n+1} \epsilon_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i \\ \lambda'_k &:= -\epsilon_k - \lambda_k - \epsilon_{k+1}\end{aligned}$$

*Démonstration.* On procède par induction sur le nombre de séparateurs. S'il n'y a qu'un séparateur, le lemme se ramène au théorème 4.11.

S'il y a  $n + 1 > 1$  séparateurs, on applique d'abord l'hypothèse d'induction aux  $n$  derniers séparateurs et ensuite le lemme 4.23 :

$$\begin{aligned}\lambda &= \begin{array}{c} \lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_{n+1} \\ \circ \quad \epsilon_1 \quad \blacksquare \quad \epsilon_2 \quad \blacksquare \quad \cdots \quad \blacksquare \quad \epsilon_{n+1} \quad \circ \end{array} \\ &\sim_0 \begin{array}{c} 0 \quad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i + \sum_{i=2}^{n+1} \epsilon_i \quad \lambda'_{n+1} \quad \lambda'_2 \quad \sum_{i=3}^{n+2} \epsilon_i + \sum_{i=2}^{n+1} \lambda_i \\ \circ \quad \epsilon_1 \quad \blacksquare \quad \epsilon_{n+2} \quad \blacksquare \quad \cdots \quad \blacksquare \quad \epsilon_2 \quad \circ \end{array} \\ &\sim_0 \begin{array}{c} \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i + \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i \quad \lambda'_{n+1} \quad \lambda'_n \quad \lambda'_1 \quad \sum_{i=2}^{n+2} \epsilon_i + \sum_{i=2}^{n+2} \lambda_i \\ \circ \quad \epsilon_1 \quad \blacksquare \quad \epsilon_{n+2} \quad \blacksquare \quad \cdots \quad \blacksquare \quad \epsilon_2 \quad \circ \end{array}\end{aligned}$$

Les deux derniers coefficients sont obtenus des formules du lemme 4.23 :

$$\begin{aligned}\lambda'_1 &= -\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i - \sum_{i=2}^{n+1} \epsilon_i - \sum_{i=2}^{n+1} (-\epsilon_i - \lambda_i - \epsilon_{i+1}) - \sum_{i=1}^{n+2} \epsilon_i \\ \sum_{i=2}^{n+2} (\lambda_i + \epsilon_i) &= \sum_{i=3}^{n+2} \epsilon_i + \sum_{i=2}^{n+1} \lambda_i + \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i + \sum_{i=2}^{n+1} \epsilon_i + \sum_{i=2}^{n+1} (-\epsilon_i - \lambda_i - \epsilon_{i+1}) + \sum_{i=1}^{n+2} \epsilon_i\end{aligned}$$

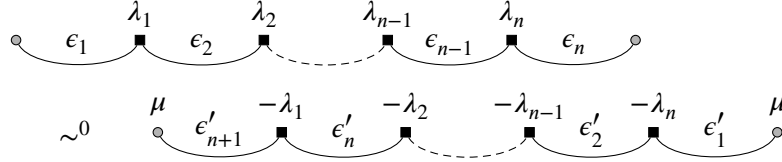
□

**Proposition 4.25.** Soit  $D$  un diagramme sous forme normale de type  $A$ .

Soit  $\lambda$  un caractère de  $P^D$  qui est soit sous forme normale ou de la forme du théorème 4.22. Il existe un isomorphisme :

#### 4. REPRÉSENTANTS DES GROUPES DES CLASSES : TYPE A

---



où

$$\mu := \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i + \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i$$

et  $\epsilon'_i$  est donné par un  $-1$  en position  $l - k + 1$  pour  $l$  la longueur du bloc et  $k$  la position du 1 dans le bloc  $\epsilon_i$ .

Dans le cas où  $\lambda = \lambda^*$  est un représentant dominant du théorème 4.22, nous obtenons un caractère antidominant  $\lambda^-$  tel que  $\lambda^* \sim^0 \lambda^-$ .

*Démonstration.* On commence par appliquer la proposition 4.24 au diagramme. Ensuite, pour chacun des blocs où  $\epsilon \neq 0$ , on note  $l$  la longueur du bloc et  $k$  la position du 1. En supposant que  $k \neq l - k + 1$ , on considère le covariant donné dans les notations du lemme 4.13 par

$$\begin{aligned} \varrho &:= R \cdot (1, 2, \dots, k-1, k, k, \dots, k, k, k-1, \dots, 2, 1)^T \\ &= (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)_\omega^T \end{aligned}$$

où les 1 sont en position  $k$  et  $l - k + 1$ . Si  $k = l - k + 1$ , nous considérons plutôt

$$\varrho := R \cdot (1, 2, \dots, k-1, k, k-1, \dots, 2, 1)^T = (0, \dots, 0, 2, 0, \dots, 0)_\omega^T$$

où le 2 est en position  $k = l - k + 1$ .

Il existe un isomorphisme  $\lambda \sim \lambda - \varrho$  obtenu en appliquant le théorème 2.24 successivement avec les covariants  $\mu_k, \mu_{k+1}, \dots, \mu_l$  puis  $\mu_{k-1}, \mu_{k-2}, \dots, \mu_{l-1}$  et ainsi de suite.

□

## Chapitre 5

# Représentants des groupes des classes : type $B$

Dans le cas des autres types que le type  $A$ , nous supposons que l'effondrement provient d'un diagramme de Dynkin pondéré pair et officiel (voir la section 2.5). Ces hypothèses permettent respectivement d'utiliser librement le théorème 2.30 et la présence de suffisamment de covariants pour arriver à un poids dominant. Une autre distinction entre le type  $A$  et les types suivants est que les groupes de classes que nous considérerons seront finis à quelques rares exceptions dans les type  $D$  et  $E$ .

Ce chapitre poursuit le travail en vu de notre principal objectif : étant donné un diagramme de Dynkin pondéré  $D$  approprié et un effondrement  $G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2} \rightarrow G\mathfrak{g}_{\geq 2}$ , nous donnons pour chacun des éléments du groupe des classes de la variété nilpotente  $N$  un représentant comme un  $\mathbf{C}[N]$ -module réflexif de rang 1 et de la forme  $H^0(G \times^{P'} \mathfrak{g}'_{\geq 2}, \mathcal{L}_{G \times^{P'} \mathfrak{g}'_{\geq 2}}(\mathbf{C}_\lambda)^*)$  où  $\lambda \in X(P')$  est un poids dominant et  $G \times^{P'} \mathfrak{g}'_{\geq 2} \rightarrow G\mathfrak{g}'_{\geq 2}$  un effondrement possiblement distinct de la même variété nilpotente. Cet objectif sera atteint pour le type  $B$  au théorème 5.11.

### 5.1 Diagrammes de Dynkin officiels et pairs

Pour les autres types nous ne considérerons que les diagrammes de Dynkin pondérés officiels et pairs, c'est-à-dire que toutes les racines ont un poids de 0 ou de 2. Avec cette hypothèse, les diagrammes sont déjà sous une forme permettant d'utiliser les résultats de

l'introduction. Ils sont effectivement formés d'un sous-diagramme de type  $A$  sous forme normale suivi d'un sous-diagramme de type respectivement  $B$ ,  $C$  ou  $D$ .

**Proposition 5.1.** *Soit  $D$  un diagramme de Dynkin pondéré officiel, pair, de type  $B_n$  et correspondant à une partition  $d = [d_1, \dots, d_N]$  de  $2n + 1$  où  $d_1 \geq \dots \geq d_N$ . On suppose aussi que  $D$  comporte au moins 2 nœuds noirs. Soit  $\alpha_i$  et  $\alpha_j$  les deux dernières racines telles que  $D(\alpha_i) = D(\alpha_j) = 2$  et  $j < i$ .*

*On définit  $D_A$  le sous-diagramme comprenant les racines  $\alpha_1$  jusqu'à la racine précédant  $\alpha_j$  et  $D_B$  le sous-diagramme formé de la racine suivant  $\alpha_i$  jusqu'à  $\alpha_n$ .*

1. *La partition correspondante est entièrement impaire et contient au moins une part plus grande que 3.*
2. *Le diagramme  $D_A$  est un diagramme de type  $A$  sous forme normale où la taille des blocs est croissante de gauche à droite.*
3. *Le nombre de blocs dans le diagramme  $D_A$  est le nombre de parts impaires distinctes et différentes de 1.*
4. *Le diagramme  $D_B$  est un diagramme USD de type  $B$  officiel.*
5. *L'effondrement  $G \times^{P^D} \mathfrak{g}_{\geq 2}^D \rightarrow G \mathfrak{g}_{\geq 2}^D$  est birationnel.*

*Démonstration.* Nous rappelons brièvement comment construire le diagramme officiel associé à une partition, on consultera aussi [13, 11].

Les orbites nilpotentes de  $B_n$  sont classifiées à l'aide des partitions de  $2n + 1$  où les parties paires ont une multiplicité paire. Étant donné une telle partition  $d = [d_1, \dots, d_N]$ , on construit pour chaque partie  $d_i$  les entiers  $d_i - 1, d_i - 3, \dots, 3 - d_i, 1 - d_i$ . On considère ensuite le multiensemble des entiers obtenus de toutes les parties  $d_i$  et on construit le  $n$ -tuplet  $\xi_1, \dots, \xi_n$  en triant par ordre décroissant et en ne considérant que les  $n$  plus grands. Enfin, le diagramme de Dynkin pondéré associé à cette partition est le suivant.

$$\begin{array}{ccccccc} \xi_1 - \xi_2 & \xi_2 - \xi_3 & & \xi_{n-1} - \xi_n & & \xi_n \\ \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \longrightarrow & \bullet \end{array}$$

Pour qu'un tel diagramme ne comporte que des 0 et 2, les entiers  $\xi_i$  et donc les parties  $d_i$  doivent tous être de même parité. Comme il s'agit d'un partition de  $2n + 1$ , on conclut que les  $d_i$  sont tous impairs et donc que les  $\xi_i$  sont tous pairs.



### 5.1. Diagrammes de Dynkin officiels et pairs

Les  $\xi_i > 0$  forment une suite décroissante d'entiers positifs répétés un nombre croissant de fois. On réécrit la suite des  $\xi_i > 0$  sous forme exponentielle comme  $o_1^{e_1}, \dots, o_l^{e_l}$  où  $l = \#\{i : \xi_i > 0\}$  de telle sorte que  $\{o_i\}$  est strictement décroissante et  $\{e_i\}$  est croissante.

En construisant le diagramme  $D$  de gauche à droite, chaque  $e_i$  pour  $i < N$  ajoute  $e_i - 1$  nœuds blancs puis un nœud noir obtenu de  $e_{i+1} - e_i$ . Comme la suite  $\{e_i\}$  est croissante, ces nœuds peuvent soit prolonger le bloc précédent en augmentant sa longueur de 1 ou encore amorcer un nouveau bloc de taille plus grande. En particulier, les blocs sont de tailles strictement croissantes et donc distinctes. Le dernier nœud,  $\alpha_j$ , se comporte différemment mais il est nécessairement exclu du sous-diagramme  $D_A$ .

Pour ce qui est de  $D_B$ , il s'obtient comme le diagramme officiel de la partition obtenue en remplaçant toutes les parties de  $d$  plus grandes ou égales à 3 par 3. Il s'agit en particulier d'un diagramme USD officiel de type  $B$ .

Enfin, l'effondrement  $G \times^{P^D} \mathfrak{g}_{\geq 2}^D \rightarrow G\mathfrak{g}_{\geq 2}^D$  est birationnel pour tous les diagrammes officiels [11].  $\square$

Après avoir séparé un diagramme de type  $B$  à la manière de la proposition 5.1, nous disposons de plusieurs outils pour manipuler chacun des sous-diagrammes. Dans le cas du sous-diagramme  $D_A$ , nous avons à notre disposition les méthodes du chapitre 4. Dans le cas du sous-diagramme  $D_B$ , il s'agit d'un diagramme USD dont les covariants sont étudiés en menus détails dans [1] et résumés dans la table 5.1. Ces outils seront suffisants pour obtenir des représentants dominants des éléments du groupe des classes.

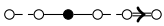

Diagramme	Poids du covariant
 le 2 en position $k$ , $3k < 2n + 1$	$2\omega_k$
 le 2 en position $k$ , $3k = 2n + 1$	$\omega_k$

TABLE 5.1 – Covariants d'un diagramme officiel USD de type  $B_n$

## 5.2 Représentants de forme normale

Comme dans le cas de  $A_n$ , plutôt que de définir immédiatement des représentants dominants, nous définissons d'abord des *représentants de forme normale* qui ne sont pas dominants mais qui préservent la forme particulière de la proposition 5.1.

L'idée générale décrivant les représentants de forme normale est simple : chaque bloc du sous-diagramme  $D_A$  porte soit un 1 ou un 0. Toutefois, la manière d'attribuer un 1 à un bloc, particulièrement dans le cas de blocs de longueur 0 amène quelques complications.

Cette forme sera identique pour la plupart des diagrammes de type  $B$ ,  $C$  et  $D$  et nous énonçons une définition suffisamment générale pour accommoder tous ces types.

**Définition 5.2.** Soit  $D$  un diagramme de Dynkin pondéré pair de type  $B_n$ ,  $C_n$  ou  $D_n$ . Supposons que  $D$  comporte au moins deux nœuds noirs et posons  $\alpha_i$  et  $\alpha_j$  les deux dernières racines telles que  $D(\alpha_i) = D(\alpha_j) = 2$  et  $j < i$ .

On définit  $D_A$  le sous-diagramme comprenant les racines  $\alpha_1$  jusqu'à la racine précédant  $\alpha_j$  et  $D_X$  le sous-diagramme formé de la racine suivant  $\alpha_i$  jusqu'à  $\alpha_n$ . Dans le cas du type  $D_l$ , on suppose aussi que  $j < l - 1$ .

Supposons que

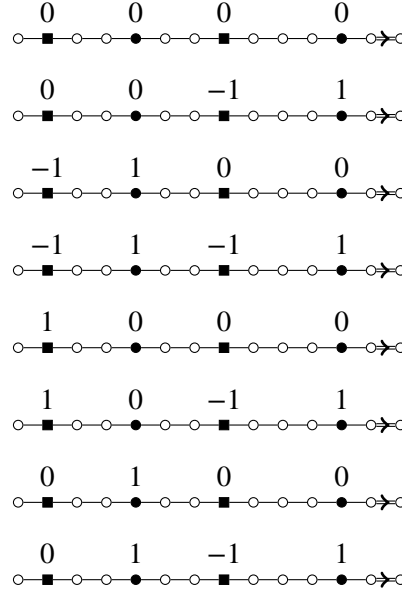
1.  $D_A$  est un diagramme de forme normale au sens de la définition 4.3.
2.  $D_X$  est un diagramme officiel USD de type  $B_n$ ,  $C_n$  ou  $D_n$ .

Soit  $\lambda$  un caractère de  $P^D$ . On dira que  $\lambda$  est sous forme normale si les conditions suivantes sont vérifiées.

1. Si un bloc de  $D_A$  est de longueur plus grande ou égale à 1, le poids du premier nœud noir est 0 ou 1 et les autres nœuds du bloc ont un poids 0. Si le poids du premier nœud noir est 1, alors le poids du séparateur à la gauche du bloc est  $-1$  s'il existe. Si le poids du premier nœud noir est 0, alors le poids du séparateur à la gauche du bloc est 0 s'il existe.
2. Si un bloc de  $D_A$  est de longueur 0, le poids du premier nœud noir à droite du bloc est 0 ou 1. Ce nœud sera un séparateur ou encore  $\alpha_j \in D_X$ . Si le poids du premier nœud noir est 1, alors le poids du séparateur à la gauche du bloc est  $-1$  s'il existe. Si le poids du premier nœud noir est 0, alors le poids du séparateur à la gauche du bloc est 0 s'il existe.

3. Si un séparateur se voit assigner simultanément un poids par les règles 1 et 2, son poids est obtenu en faisant la somme.
4. Tout autre nœud a un poids nul.

*Exemple 5.3.* Les caractères suivants sont sous forme normale. Il n'y en a pas d'autres pour ce diagramme à 3 blocs.



Les propositions suivantes démontrent que la majorité des caractères antidominants sur un diagramme de type  $B$ ,  $C$  ou  $D$  peut se ramener à la forme discutée ici. Il suffira ensuite de discuter des exceptions dans chacun des types. Les deux lemmes suivants s'attardent au cas où le sous-diagramme de type  $A$  est formé d'un seul bloc.

**Lemme 5.4.** *Soit  $D$  un diagramme de Dynkin pondéré officiel et pair de type  $B_n$ ,  $C_n$  ou  $D_n$ . Supposons que  $D$  comporte au moins deux 2 et posons  $\alpha_i$  et  $\alpha_j$  les deux dernières racines telles que  $D(\alpha_i) = D(\alpha_j) = 2$  et  $j < i$ .*

*On définit  $D_A$  le sous-diagramme comprenant les racines  $\alpha_1$  jusqu'à la racine précédant  $\alpha_j$  et  $D_X$  le sous-diagramme formé de la racine suivant  $\alpha_i$  jusqu'à  $\alpha_n$ . Dans ce cas, le sous-diagramme  $D_A$  est un diagramme de forme normale et  $D_X$  est un diagramme officiel USD de type respectivement  $B$ ,  $C$  ou  $D$ .*

## 5. REPRÉSENTANTS DES GROUPES DES CLASSES : TYPE $B$

On suppose que le diagramme USD  $D_X$  admet un covariant de poids  $2\omega_k$  et dans le cas où  $D_X$  est de type  $D_l$ , que  $k < l - 1$ . On suppose enfin que le diagramme  $D_A$  de forme normale est formé d'un seul bloc.

On note  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  les racines telles que  $D(\alpha_i) = 2$ . Soit  $\lambda$  un caractère antidominant de  $P^D$ . Alors  $\lambda \sim^0 \hat{\lambda}$  où  $\hat{\lambda}$  est soit nul ou  $\omega_1$ .

Le groupe des classes est isomorphe à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Il est généré par  $\omega_1$  et un isomorphisme explicite est donné par

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \omega_i \mapsto \left( \sum_{i=1}^n i \lambda_i \right) \omega_1 + 2\mathbb{Z}$$

Sous forme de diagramme, nous avons l'isomorphisme suivant :

$$\begin{array}{c} \lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \lambda_m \\ \circ \cdots \bullet \cdots \bullet \cdots \bullet \cdots \bullet \cdots \end{array} \sim^0 \begin{array}{c} -\sum_{i=2}^m (i-1)\lambda_i \quad \sum_{i=1}^m i\lambda_i \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \circ \cdots \bullet \cdots \bullet \cdots \bullet \cdots \bullet \cdots \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{D_X} \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{D_X}$

De plus, si  $\sum_{i=1}^m i\lambda_i$  est pair alors

$$\begin{array}{c} \lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \lambda_m \\ \circ \cdots \bullet \cdots \bullet \cdots \bullet \cdots \bullet \cdots \end{array} \sim^0 \begin{array}{c} \sum_{i=1}^m \lambda_i \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \circ \cdots \bullet \cdots \bullet \cdots \bullet \cdots \bullet \cdots \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{D_X} \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{D_X}$

et enfin si  $\sum_{i=1}^m i\lambda_i$  est impair alors

$$\begin{array}{c} \lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \lambda_m \\ \circ \cdots \bullet \cdots \bullet \cdots \bullet \cdots \bullet \cdots \end{array} \sim^0 \begin{array}{c} -1 + \sum_{i=1}^m \lambda_i \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \circ \cdots \bullet \cdots \bullet \cdots \bullet \cdots \bullet \cdots \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{D_X} \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{D_X}$

*Démonstration.* Par les propositions 5.1, 6.1 et 7.1, le sous-diagramme  $D_A$  est un diagramme de forme normale et  $D_X$  est un diagramme officiel USD de type respectivement  $B$ ,  $C$  ou  $D$ .

Nous avons à notre disposition les covariants de type déterminant de la proposition 4.10 ainsi que le covariant de  $D_X$  utilisé dans  $D$  à l'aide du théorème 2.30. Dans ce dernier cas, on note en examinant les tables 5.1, 6.1 et 7.1 qu'il s'agit d'un covariant dont le poids dans la base des poids fondamentaux de  $D$  est  $-\omega_i + 2\omega_j$ . Nous noterons le poids de ces

covariants  $\mu_1, \dots, \mu_m$  et il sera commode de les inscrire comme les colonnes de la matrice suivante dans la base des poids fondamentaux  $\omega_1, \dots, \omega_m$  correspondant aux racines noires.

$$R := \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & -1 & 0 & \\ & & & -1 & 2 & -2 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Quoique l'objectif est d'obtenir un poids dominant, il est plus commode de commencer par obtenir un caractère plus négatif. Pour  $1 \leq k \leq m-1$ , nous considérons les covariants de la forme

$$\varrho_k := R \cdot (k, k-1, \dots, 2, 1, 0, \dots, 0)^T = (k+1, 0, \dots, 0, \overbrace{-1}^{\text{position } k+1}, 0, \dots, 0)_{\omega}^T.$$

Il existe un isomorphisme  $\lambda \sim^0 \lambda - \varrho_k$  obtenu en appliquant à répétition le théorème 2.24 avec successivement les covariants de poids  $\mu_{k-1}, \mu_{k-2}, \dots, \mu_1$  puis  $\mu_{k-2}, \mu_{k-3}, \dots, \mu_1$  et ainsi de suite.

En répétant un nombre approprié de fois, on peut supposer que le seul poids non nul de  $\lambda$  soit celui de  $\omega_1$ . Plus précisément, si le poids original était  $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i \omega_i$ , nous obtenons que

$$\lambda \sim^0 \left( \sum_{i=1}^n i \lambda_i \right) \omega_1.$$

Il sera donc suffisant de considérer uniquement les caractères  $\lambda$  de la forme  $\lambda_1 \omega_1$ .

Maintenant, on considère le covariant

$$\tau := R \cdot (2, 2, \dots, 2, 1)^T = (2, 0, \dots, 0)_{\omega}^T.$$

Dans la mesure où  $\lambda_1 \leq -1$ , il existe un isomorphisme  $\lambda \sim^0 \lambda + \tau$  obtenu en appliquant le théorème 2.24 successivement avec les covariants de poids  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$  et ensuite  $\mu_{m-1}, \mu_{m-2}, \dots, \mu_1$ . En répétant un nombre de fois approprié, on obtient un diagramme de la forme annoncée.  $\square$

On prend aussi note du résultat équivalent dans le cas où  $D_A$  est formé d'un seul bloc de longueur 0, ce qui revient à dire que  $D$  est un diagramme USD.

**Lemme 5.5.** Soit  $D$  un diagramme de Dynkin pondéré officiel USD de type  $B_n$ ,  $C_n$  ou  $D_n$  admettant un covariant de poids  $2\omega_k$ . On suppose que  $D(\alpha_k) = 2$  et qu'il existe un  $P^D$ -covariant de poids  $2\omega_k$ .

Le groupe des classes est isomorphe à  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  et est généré par  $\omega_k$ . Un isomorphisme est donné par

$$\lambda_k \omega_k \mapsto \lambda_k + 2\mathbf{Z}.$$

Sous forme de diagramme, nous avons l'isomorphisme suivant si  $\lambda_k$  est pair :

$$\begin{array}{c} \lambda_k \\ \circ \cdots \cdots \bullet \cdots \cdots \end{array} \sim^0 \begin{array}{c} -\lambda_k \quad 0 \\ \circ \cdots \cdots \bullet \cdots \cdots \end{array}$$

et l'isomorphisme suivant si  $\lambda_k$  est impair.

$$\begin{array}{c} \lambda_k \\ \circ \cdots \cdots \bullet \cdots \cdots \end{array} \sim^0 \begin{array}{c} -\lambda_k - 1 \quad 1 \\ \circ \cdots \cdots \bullet \cdots \cdots \end{array}$$

En particulier, si  $\lambda$  est un caractère antidominant de  $P^D$ , il existe un caractère dominant  $\lambda^* \in X(P^D)$  donné par 0 ou  $\omega_k$  tel que  $\lambda \sim^0 \lambda^*$ . Similairement, il existe un caractère antidominant  $\lambda^- \in X(P^D)$  donné par 0 ou  $-\omega_k$  tel que  $\lambda \sim^0 \lambda^-$ .

*Démonstration.* Il suffira d'appliquer le théorème 2.24 un nombre approprié de fois en se servant de l'unique covariant indiqué dans les tables 5.1, 6.1 ou 7.1.  $\square$

**Proposition 5.6.** Soit  $D$  un diagramme de Dynkin pondéré officiel et pair de type  $B_n$ ,  $C_n$  ou  $D_n$ . Supposons que  $D$  comporte au moins deux 2 et posons  $\alpha_i$  et  $\alpha_j$  les deux dernières racines telles que  $D(\alpha_i) = D(\alpha_j) = 2$  et  $j < i$ .

On définit  $D_A$  le sous-diagramme comprenant les racines  $\alpha_1$  jusqu'à la racine précédant  $\alpha_j$  et  $D_X$  le sous-diagramme formé de la racine suivant  $\alpha_i$  jusqu'à  $\alpha_n$ . Dans ce cas, le sous-diagramme  $D_A$  est un diagramme de forme normale et  $D_X$  est un diagramme officiel USD de type respectivement  $B$ ,  $C$  ou  $D$ .

On suppose que le diagramme USD  $D_X$  admet un covariant de poids  $2\omega_k$  et dans le cas où  $D_X$  est de type  $D_l$ , que  $k < l - 1$ .

Soit  $\lambda$  un caractère antidominant de  $P^D$ . Il existe un diagramme  $D'$  et un caractère  $\hat{\lambda}$  de  $P^{D'}$  sous la forme normale de la définition 5.2 tel que  $\lambda \sim^0 \hat{\lambda}$ .

De plus, la taille des blocs de  $D'$  est décroissante.

*Démonstration.* On procède par induction sur le nombre de séparateurs dans la partie  $D_A$ . Le cas où il n'y a qu'un seul bloc est déjà discuté dans les lemmes 5.4 et 5.5. Nous considérons maintenant le cas où le diagramme  $D_A$  contient exactement 1 séparateur et donc deux blocs.

En appliquant le lemme 4.13 au premier bloc de  $D_A$  et soit le lemme 5.4 ou le lemme 5.5 au sous-diagramme  $D_X$ , seul le poids du séparateur est négatif. Ce poids sera éliminé en effectuant un échange par le théorème 4.11 et en appliquant une seconde fois soit le lemme 5.4 ou le lemme 5.5.

Pour rendre cette approche plus explicite et calculer l'impact sur le reste du diagramme, nous détaillerons la procédure dans les 12 situations légèrement différentes suivantes :

- le premier bloc peut être de longueur 0 ou non ;
  - s'il n'est pas de longueur 0, ses poids après l'application du lemme 4.13 sont tous nuls ou un des poids est 1 ;
- le deuxième bloc peut être de longueur 0 ou non ;
  - s'il n'est pas de longueur 0, ses poids après l'application du lemme 5.4 sont tous nuls ou le premier poids est 1 ;
  - s'il est de longueur 0, le dernier poids du diagramme après l'application du lemme 5.5 est nul ou 1.

On se contentera d'indiquer les différentes formes possibles dans la table suivante. Dans cette table, on indique le poids après avoir appliqué les lemmes 4.13, 5.4 et 5.5 ainsi que les formes normales possibles dans chacune de ces situations.

Dans tous les diagrammes suivants,  $x$  désigne un entier non positif. Enfin, on désignera un bloc de longueur 0 comme « --- ».

Nous noterons aussi le comportement sur un éventuel séparateur à la gauche du diagramme. Comme on pourra le constater dans la table 5.2, il se voit ajouter la somme des poids du diagramme.

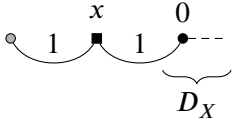
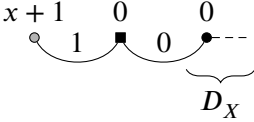
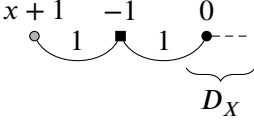
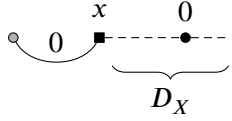
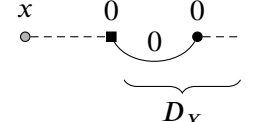
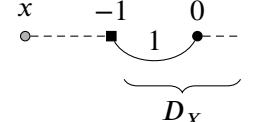
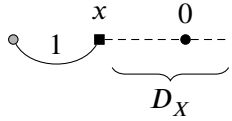
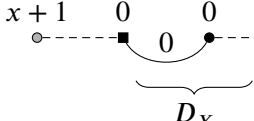
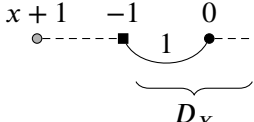
## 5. REPRÉSENTANTS DES GROUPES DES CLASSES : TYPE $B$

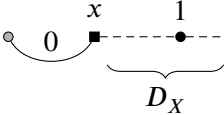
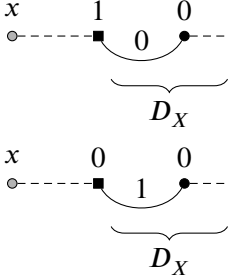
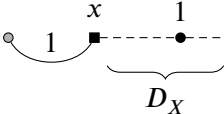
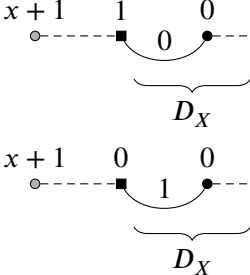
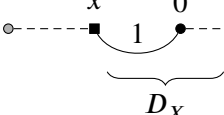
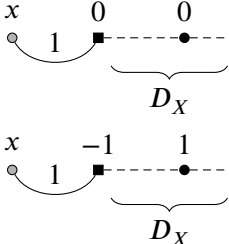
---

Poids	Formes normales
	<div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center;"> <div> </div> <div> </div> </div>
	<div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center;"> <div> </div> <div> </div> </div>
	<div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center;"> <div> </div> <div> </div> </div>

---



Poids	Formes normales
	 
	 
	 

Poids	Formes normales
	
	
	

---

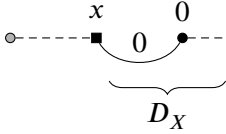
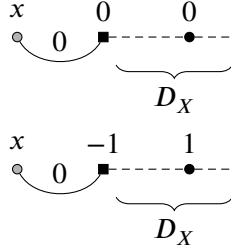
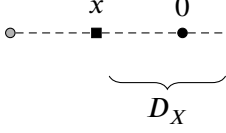
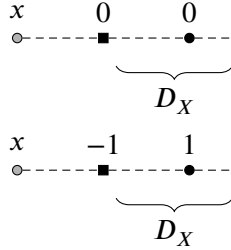
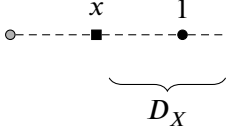
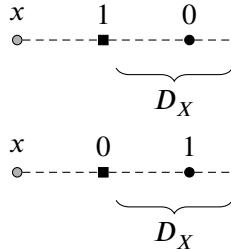
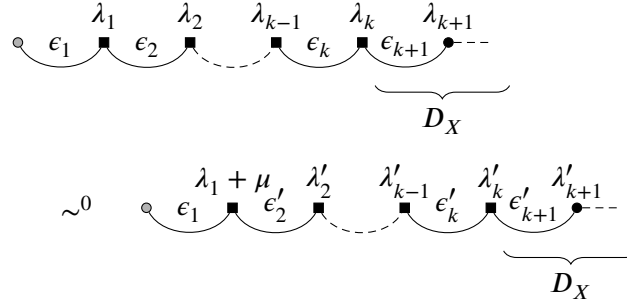
Poids	Formes normales
	
	
	

TABLE 5.2 – Formes normales pour un diagramme de 2 blocs

Pour compléter l'induction, on considère un diagramme tel que le sous-diagramme  $D_A$  contient  $k > 1$  séparateurs. On peut supposer que le lemme 4.13 a été appliqué à tous les

blocs du sous-diagramme  $D_A$  et que le lemme 5.4 ou 5.5 a été appliqué au sous-diagramme  $D_X$ .

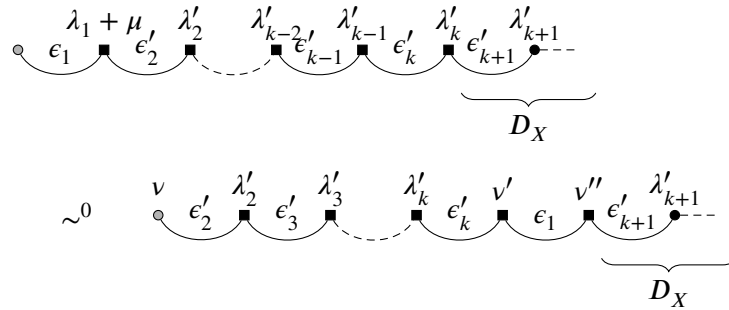
On applique ensuite l'hypothèse d'induction au diagramme formé des  $k - 1$  derniers séparateurs.



Le poids du premier séparateur devient alors

$$\lambda_1 + \mu = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i + \sum_{i=2}^{k+1} \epsilon_i.$$

On applique ensuite le lemme 4.23 sur les  $k - 2$  premiers séparateurs afin d'amener le premier bloc du diagramme à l'avant-dernière position.



où

$$\begin{aligned}
 v &= \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i + \sum_{i=1}^{k+1} \epsilon_i \\
 v' &= - \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i - \sum_{i=2}^{k-1} \lambda'_i - \sum_{i=1}^{k+1} \epsilon_i - \sum_{i=2}^k \epsilon'_i \\
 v'' &= \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i + \sum_{i=2}^k \lambda'_i + \sum_{i=2}^{k+1} \epsilon_i + \sum_{i=2}^k \epsilon'_i
 \end{aligned}$$

On note d'abord que le poids ajouté à un éventuel autre séparateur à gauche du diagramme est bien la somme de tous les poids.

Ensuite nous considérons la fin du diagramme pour s'assurer qu'il est de la forme désirée. En posant

$$\xi = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i - \sum_{i=2}^{k-1} \lambda'_i - \sum_{i=2}^{k+1} \epsilon_i - \sum_{i=2}^k \epsilon'_i,$$

la fin du diagramme est de la forme suivante.

$$\begin{array}{c}
 -\xi - \epsilon_1 \quad \xi + \lambda'_k \quad \lambda'_{k+1} \\
 \text{---} \bullet \quad \epsilon_1 \quad \blacksquare \quad \epsilon'_{k+1} \quad \bullet \text{---} \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_{D_X}
 \end{array}$$

Les  $\lambda_i$  sont obtenus de l'induction et sont donc de la forme prescrite par le théorème. De plus,  $\xi \leq 0$  et on conclut que le diagramme ci-haut est de l'une ou l'autre des formes de la table 5.2. En appliquant le cas d'un diagramme de deux blocs, on obtient donc le résultat.  $\square$

### 5.3 Autres diagrammes

Commençons par considérer brièvement les trois cas simples qui ont été exclus de l'induction. Le premier est celui d'un diagramme USD où le covariant est de poids  $2\omega_k$  qui est discuté au lemme 5.5. Nous discutons ensuite des diagrammes USD où le covariant est de poids  $\omega_k$  au corollaire 5.7 et du diagramme de l'orbite nulle au corollaire 5.8.

**Corollaire 5.7.** *Soit  $D$  un diagramme de Dynkin USD de type  $B_n$  et  $G \times^{P^D} \mathfrak{g}_{\geq 2}^D \rightarrow G\mathfrak{g}_{\geq 2}^D$  l'effondrement correspondant.*

*Soit  $\alpha_k$  l'unique racine telle que  $D(\alpha_k) = 2$ . Si le diagramme admet un covariant de poids  $\omega_k$ , alors le groupe des classes est trivial.*

*Démonstration.* Il suffira de consulter la table 5.1 et d'appliquer le théorème 2.24. □

**Corollaire 5.8.** *Soit  $D$  le diagramme de l'orbite nulle de type  $B_n$  et  $G \times^{P^D} \mathfrak{g}_{\geq 2}^D \rightarrow G\mathfrak{g}_{\geq 2}^D$  l'effondrement correspondant, alors le groupe des classes est trivial.*

Une exception qui entraîne davantage de difficultés est le cas où la partition  $d$  ne contient pas de 1 et n'est pas le diagramme de l'orbite principale. Dans ce cas, le sous-diagramme  $D_B$  est un diagramme USD admettant un covariant de poids  $\omega_k$  plutôt que  $2\omega_k$ .

**Proposition 5.9.** *Soit  $D$  un diagramme de Dynkin pondéré officiel et pair de type  $B_n$  et  $G \times^{P^D} \mathfrak{g}_{\geq 2}^D \rightarrow G\mathfrak{g}_{\geq 2}^D$  l'effondrement correspondant. Supposons que  $D$  comporte au moins deux 2 et posons  $\alpha_i$  et  $\alpha_j$  les deux dernières racines telles que  $D(\alpha_i) = D(\alpha_j) = 2$  et  $j < i$ .*

*On définit  $D_A$  le sous-diagramme comprenant les racines  $\alpha_1$  jusqu'à la racine précédant  $\alpha_j$  et  $D_B$  le sous-diagramme formé de la racine suivant  $\alpha_i$  jusqu'à  $\alpha_n$ . Dans ce cas, le sous-diagramme  $D_A$  est un diagramme de forme normale et  $D_B$  est un diagramme officiel USD de type  $B$ .*

*On suppose que le diagramme USD  $D_B$  admet un covariant de poids  $\omega_k$ .*

*Soit  $\lambda$  un caractère antidominant de  $P^D$ . Alors il existe un diagramme  $D'$  et un caractère  $\hat{\lambda}$  de  $P^{D'}$  sous la forme normale de la définition 5.2 tel que  $\lambda \sim^0 \hat{\lambda}$  où tous les nœuds du premier bloc ont un poids nul et dans le cas d'un bloc de longueur 0, le premier séparateur ne se voit pas assigner un poids de 1 par la règle 2 de la définition 5.2.*

*De plus, la taille des blocs de  $D'$  est décroissante.*

*Démonstration.* Il suffit d'adapter la preuve de la proposition 5.6 pour tenir compte du nouveau covariant. Dans le type  $B_n$ , un covariant USD de poids  $\omega_k$  n'existe que si  $3k = 2n + 1$ . En particulier, après la première étape de l'induction, c'est-à-dire après avoir effectué un échange au dernier séparateur du sous-diagramme  $D_A$ , les covariants un seul deux du sous-diagramme  $D_B$  seront de poids  $2\omega_k$ . On pourra donc se ramener à l'induction de la proposition 5.6 après le premier échange.

Supposons d'abord que le diagramme  $D_A$  ne contient qu'un seul bloc. Nous considérons dans ce cas le diagramme  $D$  en entier. Nous avons à notre disposition les covariants de type déterminant 4.10 ainsi que le covariant de  $D_B$  utilisé dans  $D$  à l'aide du théorème 2.30. Nous notons les poids de ces covariants  $\mu_1, \dots, \mu_m$  et il sera commode de les inscrire comme les colonnes de la matrice suivante dans la base des poids fondamentaux  $\omega_1, \dots, \omega_m$  correspondant aux racines noires.

$$R := \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 0 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On procède essentiellement de la même manière que dans le lemme 5.4. Pour  $1 \leq k \leq m-1$ , on considère les covariants de la forme

$$\rho_k := R \cdot (k, k-1, \dots, 2, 1, 0, \dots, 0)^T = (k+1, 0, \dots, 0, \overbrace{-1}^{\text{position } k+1}, 0, \dots, 0)_{\omega}^T.$$

Il existe un isomorphisme  $\lambda \sim^0 \lambda - \rho_k$  obtenu en appliquant à répétition le théorème 2.24 avec successivement les covariants de poids  $\mu_{k-1}, \mu_{k-2}, \dots, \mu_1$  puis  $\mu_{k-2}, \mu_{k-3}, \dots, \mu_1$  et ainsi de suite. En répétant un nombre de fois approprié, on peut supposer que le seul poids non nul de  $\lambda$  soit celui de  $\omega_1$ . Plus précisément, si le poids original était  $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i \omega_i$ , nous obtenons que

$$\lambda \sim^0 \left( \sum_{i=1}^n i \lambda_i \right) \omega_1.$$

Il sera donc suffisant de considérer uniquement les caractères  $\lambda$  de la forme  $\lambda_1 \omega_1$ .

Enfin on considère le covariant

$$\tau := R \cdot (1, 1, \dots, 1, 1)^T = (1, 0, \dots, 0)_{\omega}^T.$$

Dans la mesure où  $\lambda_1 \leq -1$ , il existe un isomorphisme  $\lambda \sim^0 \lambda + \tau$  obtenu en appliquant à répétition le théorème 2.24 avec successivement les covariants de poids  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ . En répétant un nombre de fois approprié, on obtient un diagramme entièrement nul.

On peut désormais procéder à l'induction comme dans la proposition 5.6 sans autre modification.  $\square$

## 5.4 Structure de groupe

**Théorème 5.10.** *Soit  $D$  un diagramme de Dynkin pondéré officiel et pair de type  $B_n$ ,  $C_n$  ou  $D_n$  et  $G \times^{P^D} \mathfrak{g}_{\geq 2}^D \rightarrow G \mathfrak{g}_{\geq 2}^D$  l'effondrement correspondant. Supposons que  $D$  comporte au moins deux 2 et posons  $\alpha_i$  et  $\alpha_j$  les deux dernières racines telles que  $D(\alpha_i) = D(\alpha_j) = 2$  et  $j < i$ .*

*On définit  $D_A$  le sous-diagramme comprenant les racines  $\alpha_1$  jusqu'à la racine précédant  $\alpha_j$  et  $D_X$  le sous-diagramme formé de la racine suivant  $\alpha_i$  jusqu'à  $\alpha_n$ . Dans ce cas, le sous-diagramme  $D_A$  est un diagramme de forme normale et  $D_X$  est un diagramme officiel USD de type respectivement  $B$ ,  $C$  ou  $D$ . On notera par  $m$  le nombre de blocs dans le diagramme  $D_A$ .*

*On suppose que le diagramme USD  $D_X$  admet un covariant qui, lorsqu'il est inclus dans  $D$  par le théorème 2.30, est de poids  $2\omega_j - 2\omega_i$  ou  $\omega_j - \omega_i$  dans la base des poids fondamentaux de  $D$ .*

*Alors il existe un isomorphisme  $\text{Cl}(\mathcal{O}_d) \simeq (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^m$  dont la restriction sur les représentants  $\hat{\lambda} \in X(P^{D'})$  est donnée en appliquant un 1 au  $i$ -ème facteur si le  $i$ -ème bloc est de type*

$$\begin{array}{c} -1 \quad 1 \\ \circ - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \circ \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{c} -1 \quad 1 \\ \circ - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \circ \end{array}$$

*et un 0 au  $i$ -ème facteur si le  $i$ -ème bloc est de type*

$$\begin{array}{c} 0 \quad 0 \\ \circ - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \circ \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{c} 0 \quad 0 \\ \circ - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \circ \end{array}.$$

*Démonstration.* Il suffira de vérifier que la somme de deux blocs non nuls est nulle et n'affecte pas le reste du diagramme.

Dans le cas d'un bloc de longueur 0, le résultat suit du théorème 2.26 :

$$\begin{array}{c} -1 \quad 1 \\ \circ - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \circ \end{array} \quad \sim \quad \begin{array}{c} 1 \quad -1 \\ \circ - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \circ \end{array}.$$

Il suffira donc de faire la somme.

Similairement, dans le cas d'un bloc de longueur 1, le résultat suit du théorème 2.24 :

$$\begin{array}{c} -1 \quad 1 \\ \circ - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \circ \end{array} \quad \sim \quad \begin{array}{c} -1 \quad 1 \\ \circ - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \circ \end{array}.$$





## 5.5 Représentants dominants et antidominants

**Théorème 5.11.** *Soit  $D$  un diagramme de Dynkin pondéré officiel et pair de type  $B_n$  et  $G \times^{P^D} \mathfrak{g}_{\geq 2}^D \rightarrow G \mathfrak{g}_{\geq 2}^D$  l'effondrement correspondant. Supposons que  $D$  comporte au moins deux 2 et posons  $\alpha_i$  et  $\alpha_j$  les deux dernières racines telles que  $D(\alpha_i) = D(\alpha_j) = 2$  et  $j < i$ .*

*On définit  $D_A$  le sous-diagramme comprenant les racines  $\alpha_1$  jusqu'à la racine précédant  $\alpha_j$  et  $D_B$  le sous-diagramme formé de la racine suivant  $\alpha_i$  jusqu'à  $\alpha_n$ . Dans ce cas, le sous-diagramme  $D_A$  est un diagramme de forme normale et  $D_B$  est un diagramme officiel USD de type  $B$ .*

*Soit  $\lambda$  un caractère de  $P^D$  de la forme normale de la définition 5.2. Alors il existe un diagramme  $D^\star$  et un caractère  $\lambda^\star \in X(P^{D^\star})$  dominant tel que  $\lambda \sim^0 \lambda^\star$ . Il existe aussi un diagramme  $D^-$  et un caractère  $\lambda^- \in X(P^{D^-})$  antidominant tel que  $\lambda \sim^0 \lambda^-$ .*

*Démonstration.* Le sous-diagramme  $D_A$  de  $\lambda$  est un diagramme de type  $A$  sous forme normale. On peut donc appliquer le théorème 4.22 pour obtenir un caractère dominant sauf possiblement pour le poids de la racine finale.

Le poids de la racine finale peut être calculé à l'aide de la proposition 4.17 et au besoin du lemme 4.20. En observant les différentes formes normales obtenues dans la table 5.2, on conclut que le poids de la dernière racine est nul dans tous les cas sauf le suivant :

$$\begin{array}{c} x \quad \quad 0 \quad \quad 1 \\ \circ \text{---} \text{---} \blacksquare \text{---} \text{---} \bullet \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{D_X} \end{array}$$

qui n'est pas modifié par l'application de la proposition 4.17.

Enfin, en posant  $\lambda^- := -\lambda^\star$ , nous avons  $\lambda^- \sim^0 \lambda^\star \sim^0 \lambda$ .

□

Dans le cas où  $D$  est un diagramme USD ou le diagramme de l'orbite nulle, nous avons déjà produit des représentants dominants et antidominants au lemme 5.5 et aux corollaires 5.7 et 5.8.

## Chapitre 6

# Représentants des groupes des classes : type $C$

Ce chapitre poursuit le travail en vu de notre principal objectif : étant donné un diagramme de Dynkin pondéré  $D$  approprié et un effondrement  $G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2} \rightarrow G\mathfrak{g}_{\geq 2}$ , nous donnons pour chacun des éléments du groupe des classes de la variété nilpotente  $N$  un représentant comme un  $\mathbf{C}[N]$ -module réflexif de rang 1 et de la forme  $H^0(G \times^{P'} \mathfrak{g}'_{\geq 2}, \mathcal{L}_{G \times^{P'} \mathfrak{g}'_{\geq 2}}(\mathbf{C}_\lambda)^*)$  où  $\lambda \in X(P')$  est un poids dominant et  $G \times^{P'} \mathfrak{g}'_{\geq 2} \rightarrow G\mathfrak{g}'_{\geq 2}$  un effondrement possiblement distinct de la même variété nilpotente.

Ce chapitre discute du cas des diagrammes pairs et officiels de type  $C$ . Il est à noter que la majorité du travail a déjà été fait dans le lemme 5.4 ; il ne suffira que de discuter des cas particuliers se présentant en type  $C$ .

### 6.1 Diagrammes de Dynkin officiels et pairs

Pour le type  $C$ , les diagrammes officiels et pairs proviennent soit d'une partition entièrement paire ou entièrement impaire. Nous considérerons séparément ces deux cas.

**Proposition 6.1.** *Soit  $D$  un diagramme de Dynkin pondéré officiel, pair, de type  $C_n$  et correspondant à une partition  $d = [d_1, \dots, d_N]$  de  $2n$  où  $d_1 \geq \dots \geq d_N$ . Soit aussi  $G \times^{P^D} \mathfrak{g}_{\geq 2}^D \rightarrow G\mathfrak{g}_{\geq 2}^D$  l'effondrement correspondant. On suppose aussi que  $D$  comporte au*

moins 2 nœuds noirs. Soit  $\alpha_i$  et  $\alpha_j$  les deux dernières racines telles que  $D(\alpha_i) = D(\alpha_j) = 2$  et  $j < i$ .

On définit  $D_A$  le sous-diagramme comprenant les racines  $\alpha_1$  jusqu'à la racine précédant  $\alpha_j$  et  $D_C$  le sous-diagramme formé de la racine suivant  $\alpha_i$  jusqu'à  $\alpha_n$ .

La partition correspondante est entièrement composée de parts paires ou entièrement composée de parts impaires.

1. Si la partition est entièrement composée de parts paires, alors la partition n'est pas entièrement composée de 2 et  $D(\alpha_n) = 2$ .
2. Si la partition est entièrement composée de parts impaires, alors la partition n'est pas entièrement composée de 1 et de 3 et  $D(\alpha_n) = 0$ .

Quelle que soit la parité de la partition, les sous-diagrammes  $D_A$  et  $D_C$  ont les propriétés suivantes.

1. Le diagramme  $D_A$  est un diagramme de type A sous forme normale où la taille des blocs est croissante de gauche à droite.
2. Le nombre de blocs dans le diagramme  $D_A$  est le nombre de parties distinctes et différentes de 1.
3. Le diagramme  $D_C$  est un diagramme de Dynkin pondéré officiel USD de type C.
4. Le morphisme  $G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2} \rightarrow G\mathfrak{g}_{\geq 2}$  est birationnel.

*Démonstration.* Nous rappelons brièvement comment construire le diagramme officiel associé à une partition, on consultera aussi [13, 11].

Les orbites nilpotentes de  $C_n$  sont classifiées à l'aide de partitions de  $2n$  où les parts impaires ont une multiplicité paire. Étant donné une telle partition  $d = [d_1, \dots, d_N]$ , on considère pour chaque partie  $d_i$  les entiers  $d_i - 1, d_i - 3, \dots, 3 - d_i, 1 - d_i$ . On considère ensuite le multiensemble des entiers obtenus de toutes les parts  $d_i$  et on construit le  $n$ -tuplet  $\xi_1, \dots, \xi_n$  en triant les entiers par ordre décroissant et en ne considérant que les  $n$  plus grands. Enfin, le diagramme de Dynkin pondéré associé à cette partition est alors

$$\begin{array}{ccccccc} \xi_1 - \xi_2 & \xi_2 - \xi_3 & & \xi_{n-1} - \xi_n & & 2\xi_n \\ \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \cdots & \bullet \end{array}$$

Pour qu'un tel diagramme ne comporte que des 0 et 2, les entiers  $\xi_i$  et donc les parts  $d_i$  doivent être de même parité. Si les  $\xi_i$  sont tous pairs, alors la partition est entièrement

formée de parts impaires. Si les  $\xi_i$  sont tous impairs, alors la partition est entièrement formée de parts paires.

Quelle que soit la parité des  $\xi_i$ , ils forment une suite décroissante d'entiers positifs répétés un nombre croissant de fois. On réécrit la suite des  $\xi_i > 0$  sous forme exponentielle comme  $o_1^{e_1}, \dots, o_l^{e_l}$  de telle sorte que  $\{o_i\}$  est strictement décroissante et  $\{e_i\}$  est croissante.

En construisant le diagramme  $D$  de gauche à droite, chaque  $e_i$  pour  $i < N$  ajoute  $e_i - 1$  nœuds blancs puis un nœud noir obtenu de  $e_{i+1} - e_i$ . Comme la suite  $\{e_i\}$  est croissante, ces nœuds peuvent soit prolonger le bloc précédent en augmentant sa longueur de 1 ou encore amorcer un nouveau bloc de taille plus grande. En particulier, les blocs sont de tailles strictement croissantes et donc distinctes. Le dernier nœud,  $\alpha_j$ , se comporte différemment mais il est nécessairement exclu du sous-diagramme  $D_A$ .

Dans le cas où la partition est entièrement paire, aucun  $\xi_i$  n'est nul ce qui force  $D(\alpha_n) = 2$  et il s'agit en particulier d'un diagramme USD officiel. Si la partition est entièrement impaire, le diagramme  $D_C$  s'obtient comme le diagramme officiel de la partition obtenue en remplaçant toutes les parts plus grandes ou égales à 3 par 3.

Enfin, le morphisme  $G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2} \rightarrow G \mathfrak{g}_{\geq 2}$  est birationnel pour tous les diagrammes officiels [11].  $\square$

Nous procéderons maintenant de manière similaire au chapitre précédent en obtenant d'abord des représentants de la forme normale de la définition 5.2. Dans le cas du sous-diagramme  $D_A$ , nous avons à notre disposition les méthodes du chapitre 4. Dans le cas du sous-diagramme  $D_C$ , il s'agit d'un diagramme USD dont les covariants sont étudiés en menus détails dans [1] et résumés dans la table 6.1. Nous considérerons d'abord les partitions impaires, puis les partitions paires et enfin les cas spéciaux.

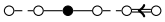

Diagramme	Poids du covariant
 le 2 en position $k = 2m$ et $3k \leq 2n$	$\omega_k$
	$2\omega_k$

TABLE 6.1 – Covariants d'un diagramme officiel USD de type  $C_n$

## 6.2 Partition entièrement composée de parties impaires

**Proposition 6.2.** *Soit  $D$  un diagramme de Dynkin pondéré officiel et pair de type  $C_n$  associé à une partition entièrement composée de parts impaires. Soit aussi  $G \times^{P^D} \mathfrak{g}_{\geq 2}^D \rightarrow G \mathfrak{g}_{\geq 2}^D$  l'effondrement correspondant.*

*Si  $D$  comprend au moins deux racines noires, on pose  $\alpha_i$  et  $\alpha_j$  les deux dernières racines telles que  $D(\alpha_i) = D(\alpha_j) = 2$  et  $j < i$ . On définit alors  $D_A$  le sous-diagramme comprenant les racines  $\alpha_1$  jusqu'à la racine précédant  $\alpha_j$  et  $D_C$  le sous-diagramme formé de la racine suivant  $\alpha_i$  jusqu'à  $\alpha_n$ . Dans ce cas, le sous-diagramme  $D_A$  est un diagramme de forme normale et  $D_C$  est un diagramme officiel USD de type respectivement  $C$ .*

*Soit  $\lambda$  un caractère antidominant de  $P$ , alors  $\lambda \sim^0 0$ .*

*Démonstration.* Dans le cas où le diagramme est nul, le résultat est trivial. Dans le cas où le diagramme est USD, le résultat suit de la table 6.1. On pourra donc supposer que le diagramme contient au moins deux nœuds noirs et donc se sépare en deux sous-diagrammes  $D_A$  et  $D_C$ . On procède par induction sur le nombre de blocs.

Supposons que la partie  $D_A$  du diagramme ne contient qu'un seul bloc. Nous utiliserons les covariants du lemme 4.13 ainsi que celui de la table 6.1 qui est ici de poids  $\omega_k$ . Nous l'utiliserons à l'aide du théorème 2.30 comme un covariant de poids  $-\omega_i + \omega_j$  dans la base des poids fondamentaux de  $D$ .

Nous noterons les poids des covariants  $\mu_1, \dots, \mu_n$  et il sera commode de les inscrire comme les colonnes de la matrice suivante dans la base des poids fondamentaux  $\omega_1, \dots, \omega_n$  correspondant aux nœuds noirs.

$$R := \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & & & & -1 & 0 \\ & & & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & & & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

En procédant similairement au lemme 4.13, pour  $1 \leq k \leq n-1$ , nous considérons les covariants de la forme

$$\varrho_k := R \cdot (k, k-1, \dots, 2, 1, 0, \dots, 0)^T = (k+1, 0, \dots, 0, \overbrace{-1}^{\text{position } k+1}, 0, \dots, 0)_{\omega}^T.$$

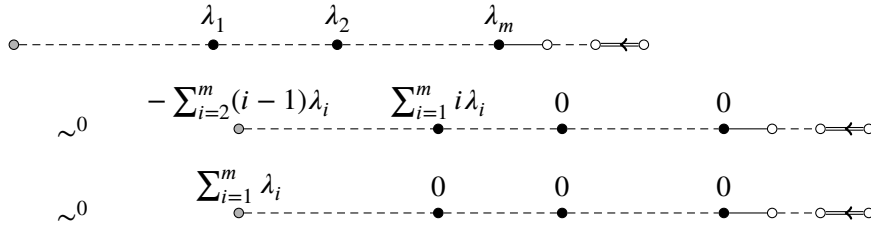
Il existe un isomorphisme  $\lambda \sim^0 \lambda - \varrho_k$  obtenu en appliquant à répétition le théorème 2.24 avec successivement les covariants de poids  $\mu_{k-1}, \mu_{k-2}, \dots, \mu_1$  puis  $\mu_{k-2}, \mu_{k-3}, \dots, \mu_1$  et ainsi de suite.

Maintenant, on considère le covariant

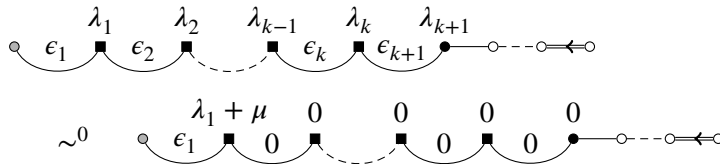
$$\tau := R \cdot (1, 1, \dots, 1, 1)^T = (1, 0, \dots, 0)_{\omega}^T$$

un nombre approprié de fois, le diagramme devient complètement nul, comme désiré. Sous forme de diagramme, nous avons les isomorphismes suivants. Dans la mesure où  $\lambda_1 \leq -1$ , il existe un isomorphisme  $\lambda \sim^0 \lambda + \tau$  obtenu en appliquant le théorème 2.24 successivement avec les covariants en poids  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ . En répétant un nombre de fois approprié, on obtient un diagramme nul.

Sous forme de diagramme, nous avons les isomorphismes suivants. On note en particulier que le poids d'un éventuel séparateur à la gauche du diagramme est modifié de la somme des poids de  $D_C$ .



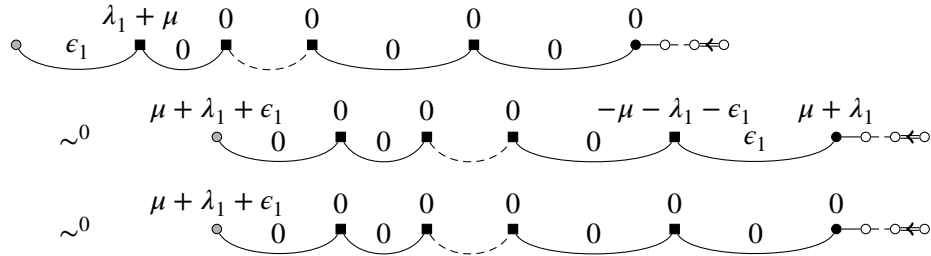
Maintenant, on considère le cas où le diagramme  $D_A$  est formé de  $k > 1$  blocs. On peut supposer que le lemme 4.13 a été appliqué à chacun des blocs du sous-diagramme  $D_A$  et que le cas d'un seul bloc du présent théorème a été appliqué au sous-diagramme  $D_C$ . On applique ensuite l'hypothèse d'induction au diagramme formé des  $k - 1$  derniers séparateurs.



Le poids du premier séparateur est alors

$$\mu = \sum_{i=2}^{k+1} \lambda_i + \sum_{i=2}^{k+1} \epsilon_i.$$

On applique ensuite le lemme 4.23 sur les  $k - 1$  premiers séparateurs afin d'amener le premier bloc du diagramme à la position du dernier bloc. Enfin, on applique à nouveau le cas d'un seul bloc du présent théorème au sous-diagramme  $D_C$  pour obtenir un diagramme nul.



□

### 6.3 Partition entièrement composée de parties paires

Dans le cas d'une partition entièrement composée de parties paires, le sous-diagramme  $D_C$  admet un covariant de poids  $2\omega_k$ . En particulier, la proposition 5.6 s'applique.

**Proposition 6.3.** *Soit  $D$  un diagramme de Dynkin pondéré officiel et pair de type  $C_n$  correspondant à une partition  $d$  formée entièrement de parties paires. Soit aussi  $G \times^{P^D} \mathfrak{g}_{\geq 2}^D \rightarrow G\mathfrak{g}_{\geq 2}^D$  l'effondrement correspondant.*

*Supposons que  $D$  comporte au moins deux 2 et posons  $\alpha_i$  et  $\alpha_j$  les deux dernières racines telles que  $D(\alpha_i) = D(\alpha_j) = 2$  et  $j < i$ . On définit  $D_A$  le sous-diagramme comprenant les racines  $\alpha_1$  jusqu'à la racine précédant  $\alpha_j$  et  $D_C$  le sous-diagramme formé de la racine suivant  $\alpha_i$  jusqu'à  $\alpha_n$ . Dans ce cas, le sous-diagramme  $D_A$  est un diagramme de forme normale et  $D_C$  est un diagramme officiel USD de type C.*

*Il existe un diagramme  $D'$  et un caractère  $\hat{\lambda} \in X(P^{D'})$  sous la forme normale de la définition 5.2 tel que  $\lambda \sim^0 \hat{\lambda}$ .*

*De plus, la taille des blocs de  $D'$  est décroissante.*



*Démonstration.* Il suffira de montrer que les hypothèses de la proposition 5.6 sont vérifiées. Comme  $d$  ne contient pas que des 2, le diagramme contient au moins 2 nœuds noirs et donc il se sépare en deux sous-diagrammes  $D_A$  et  $D_C$  à la manière de la proposition 6.1. En particulier, soit  $\alpha_i$  et  $\alpha_j$  les deux dernières racines telles que  $D(\alpha_i) = D(\alpha_j) = 2$  et  $j < i$ .

Comme la partition est entièrement paire, on conclut que  $\alpha_i = \alpha_n$  et en consultant la table 6.1, on déduit que le diagramme  $D_C$  admet un covariant de poids  $2\omega_k$ . Lorsque ce covariant est vu comme un covariant de  $D$  par le biais du théorème 2.30, son poids est de  $-2\omega_i + 2\omega_j$ .

Toutes les hypothèses de la proposition 5.6 sont vérifiées et le résultat suit.  $\square$

## 6.4 Autres diagrammes

Il reste à considérer les cas simples du diagramme nul et des diagrammes USD.

**Proposition 6.4.** *Soit  $D$  le diagramme de l'orbite nulle de type  $C_n$  et  $G \times^{P^D} \mathfrak{g}_{\geq 2}^D \rightarrow G\mathfrak{g}_{\geq 2}^D$  l'effondrement correspondant.*

*Soit  $\lambda \in X(P^D)$ , alors  $\lambda = 0$ .*

**Proposition 6.5.** *Soit  $D$  un diagramme de Dynkin USD de type  $C_n$  et  $G \times^{P^D} \mathfrak{g}_{\geq 2}^D \rightarrow G\mathfrak{g}_{\geq 2}^D$  l'effondrement correspondant. Posons  $\alpha_k$  pour l'unique racine telle que  $D(\alpha_k) = 2$ .*

*Soit  $\lambda$  un caractère antidominant de  $P^D$ .*

1. *Si  $3k < 2n$ , alors  $\lambda \sim^0 0$ ;*
2. *Si  $3k = 2n$ , alors  $\lambda \sim^0 \lambda^*$  où  $\lambda^*$  est 0 ou  $\omega_k$ .*  
*Similairement,  $\lambda \sim^0 \lambda^-$  où  $\lambda^-$  est 0 ou  $-\omega_k$ .*

*Démonstration.* Il suffira de consulter la table 5.1.  $\square$

## 6.5 Représentants dominants et antidominants

Nous avons déjà produit des représentants dominants dans tous les cas à l'exception de celui d'une partition entièrement composée de parties impaires. Nous avons toutefois discuté à la proposition 6.2 que les hypothèses de la proposition 5.6 s'appliquent. En particulier, on peut obtenir des représentants dominants et antidominants en appliquant le théorème 5.11.



## Chapitre 7

# Représentants des groupes des classes : type $D$

### 7.1 Diagrammes de Dynkin officiels et pairs

Ce chapitre poursuit le travail en vu de notre principal objectif : étant donné un diagramme de Dynkin pondéré  $D$  approprié et un effondrement  $G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2} \rightarrow G\mathfrak{g}_{\geq 2}$ , nous donnons pour chacun des éléments du groupe des classes de la variété nilpotente  $N$  un représentant comme un  $\mathbf{C}[N]$ -module réflexif de rang 1 et de la forme  $H^0(G \times^{P'} \mathfrak{g}'_{\geq 2}, \mathcal{L}_{G \times^{P'} \mathfrak{g}'_{\geq 2}}(\mathbf{C}_\lambda)^*)$  où  $\lambda \in X(P')$  est un poids dominant et  $G \times^{P'} \mathfrak{g}'_{\geq 2} \rightarrow G\mathfrak{g}'_{\geq 2}$  un effondrement possiblement distinct de la même variété nilpotente.

Ce chapitre discute du cas des diagrammes pairs et officiels de  $D$ . Il est à noter que la majorité du travail a déjà été fait dans le lemme 5.4 ; il ne suffira que de discuter des cas particuliers se présentant en type  $D$ . Toutefois, ces particularités du type  $D$  sont considérablement plus nombreuses que dans le type  $C$ .

**Proposition 7.1.** *Soit  $D$  un diagramme de Dynkin pondéré officiel, pair, de type  $D_n$  où  $n \geq 3$  et correspondant à une partition  $d = [d_1, \dots, d_N]$  de  $2n + 1$  où  $d_1 \geq \dots \geq d_N$ . Soit aussi  $G \times^{P^D} \mathfrak{g}_{\geq 2}^D \rightarrow G\mathfrak{g}_{\geq 2}^D$  l'effondrement correspondant. On suppose aussi que  $D$  comporte au moins 2 nœuds noirs. Soit  $\alpha_i$  et  $\alpha_j$  les deux dernières racines telles que  $D(\alpha_i) = D(\alpha_j) = 2$  et  $j < i$ .*

*On définit  $D_A$  le sous-diagramme comprenant les racines  $\alpha_1$  jusqu'à la racine précédent*

## 7. REPRÉSENTANTS DES GROUPES DES CLASSES : TYPE $D$

---

$\alpha_j$  et  $D_C$  le sous-diagramme formé de la racine suivant  $\alpha_i$  jusqu'à  $\alpha_n$ .

La partition correspondante est entièrement composée de parties paires ou entièrement composée de parties impaires.

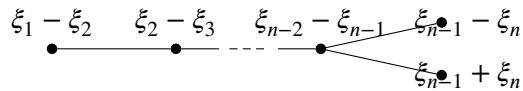
1. Si la partition est entièrement composée de parties paires, alors la partition n'est pas entièrement composée de 2. Dans ce cas, on pourra sans perdre de généralité supposer que  $D(\alpha_{n-1}) = 0$  et  $D(\alpha_n) = 2$ .
2. Si la partition est entièrement composée de parties impaires, alors la partition n'est pas entièrement composée de 1 et de 3.

Quelle que soit la parité de la partition, les sous-diagrammes  $D_A$  et  $D_D$  ont les propriétés suivantes.

1. Le diagramme  $D_A$  est un diagramme de type  $A$  sous forme normale où la taille des blocs est croissante de gauche à droite.
2. Le nombre de blocs dans le diagramme  $D_A$  est le nombre de parties distinctes et différentes de 1.
3. Le diagramme  $D_D$  est un diagramme un seul deux de type  $D$  officiel.
4. Si la partition contient au moins un 1, le sous-diagramme  $D_D$  contient au moins 3 racines.
5. L'effondrement  $G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2} \rightarrow G\mathfrak{g}_{\geq 2}$  est birationnel.

*Démonstration.* Nous rappelons brièvement comment construire le diagramme officiel associé à une partition, on consultera aussi [13, 11].

Les orbites nilpotentes de  $D_n$  sont classifiées à l'aide de partitions de  $2n$  où les parties paires ont une multiplicité paire. Étant donné une telle partition  $d = [d_1, \dots, d_N]$ , on considère pour chaque partie  $d_i$  les entiers  $d_i - 1, d_i - 3, \dots, 3 - d_i, 1 - d_i$ . On considère ensuite le multiensemble des entiers obtenus de toutes les parties  $d_i$  et on construit le  $n$ -tuplet  $\xi_1, \dots, \xi_n$  en triant les entiers par ordre décroissant et en ne considérant que les  $n$  plus grands. Enfin, le diagramme de Dynkin pondéré associé à cette partition est alors



Dans le cas d'une partition entièrement paire, deux diagrammes sont associés à  $d$ . Ils sont obtenus en remplaçant la règle précédente par  $D(\alpha_{n-1}) = 0$  et  $D(\alpha_n) = 2$  ou par  $D(\alpha_{n-1}) = 2$  et  $D(\alpha_n) = 0$ . Nous ne considérerons que le cas où  $D(\alpha_n) = 2$ .

Pour qu'un tel diagramme ne comporte que des 0 et 2, les entiers  $\xi_i$  et donc les parties  $d_i$  doivent être de même parité. Si les  $\xi_i$  sont tous pairs, alors la partition est entièrement formée de parties impaires. Si les  $\xi_i$  sont tous impairs, alors la partition est entièrement formée de parties paires.

Quelle que soit la parité des  $\xi_i$ , ils forment une suite décroissante d'entiers positifs répétés un nombre croissant de fois. On réécrit la suite des  $\xi_i > 0$  sous forme exponentielle comme  $o_1^{e_1}, \dots, o_l^{e_l}$  de telle sorte que  $\{o_i\}$  est strictement décroissante et  $\{e_i\}$  est croissante.

En construisant le diagramme  $D$  de gauche à droite, chaque  $e_i$  pour  $i < N$  ajoute  $e_i - 1$  nœuds blancs puis un nœud noir obtenu de  $e_{i+1} - e_i$ . Comme la suite  $\{e_i\}$  est croissante, ces nœuds peuvent soit prolonger le bloc précédent en augmentant sa longueur de 1 ou encore amorcer un nouveau bloc de taille plus grande. En particulier, les blocs sont de tailles strictement croissantes et donc distinctes. Le dernier nœud,  $\alpha_i$ , se comporte différemment mais il est nécessairement exclu du sous-diagramme  $D_A$ . L'avant-dernier nœud,  $\alpha_{n-1}$  se comporte aussi différemment dans le cas des partitions entièrement paires, mais nous avons fait la supposition que  $D(\alpha_{n-1}) = 0$  comme désiré.

Pour ce qui est du sous-diagramme  $D_D$ , si la partition est entièrement paire, alors la taille du bloc est paire étant donné que toutes les parties ont une multiplicité paire. Étant donné que  $D(\alpha_{n-1}) = 0$  et  $D(\alpha_n) = 2$ , on conclut qu'il s'agit d'un diagramme officiel en consultant par exemple la table 7.1. Si la partition est entièrement impaire, le diagramme  $D_D$  s'obtient comme le diagramme officiel de la partition obtenue en remplaçant toutes les parties plus grandes ou égales à 3 par 3.

Enfin, l'effondrement  $G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2} \rightarrow G\mathfrak{g}_{\geq 2}$  est birationnel pour tous les diagrammes officiels [11].  $\square$

Nous procéderons maintenant de manière similaire aux deux chapitres précédents. Dans le cas du sous-diagramme  $D_A$ , nous avons à notre disposition les méthodes du chapitre 4. Dans le cas du sous-diagramme  $D_D$ , il s'agit d'un diagramme un seul deux dont les covariants sont étudiés en menus détails dans [1] et résumés dans la table 7.1.

Nous considérerons d'abord les partitions paires, puis les partitions impaires. Nous considérerons enfin les cas des diagrammes un seul deux et du diagramme nul.

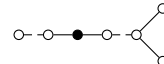
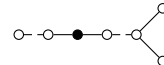

Diagramme	Poids du covariant
 le 2 en position $k$ et $3k < 2n$	$2\omega_k$
 le 2 en position $k$ et $3k = 2n$	$\omega_k$
 n pair	$2\omega_n$

 TABLE 7.1 – Covariants d'un diagramme officiel un seul deux de type  $D_n$ 

## 7.2 Partition entièrement composée de parties paires

**Proposition 7.2.** *Soit  $D$  un diagramme de Dynkin pondéré officiel de type  $D_n$  associé à une partition  $d$  entièrement composée de parties paires et où  $D(\alpha_n) = 2$ . Soit aussi  $G \times^{P^D} \mathfrak{g}_{\geq 2}^D \rightarrow G \mathfrak{g}_{\geq 2}^D$  l'effondrement correspondant.*

*Soit  $\lambda$  un caractère antidominant de  $P$ . Il existe un diagramme  $D^\star$  et un caractère  $\lambda^\star \in X(P^{D^\star})$  tel que  $\lambda \sim^0 \lambda^\star$  et  $\lambda^\star$  est soit 0 ou  $\omega_n$ . Similairement,  $\lambda \sim \lambda^-$  où  $\lambda^-$  est 0 ou  $-\omega_k$ .*

*Démonstration.* Commençons par noter qu'il s'agit des partitions de type *very even* ce qui nous permet de conclure que tous les blocs sont de taille paire. En particulier, nous avons un covariant un seul deux de poids  $2\omega_n$  dans le sous-diagramme  $D_D$  même après d'éventuels échanges dans le sous-diagramme  $D_A$ . Enfin, on effectuera ces éventuels échanges en utilisant la remarque 4.12 du théorème 4.11.

On procède encore une fois par induction sur le nombre de blocs dans le sous-diagramme  $D_A$ . Supposons que la partie  $D_A$  du diagramme ne contient qu'un seul bloc. On suppose de plus pour l'instant que ce bloc n'est pas de longueur 0.

Nous avons à notre disposition les covariants de type déterminant de la proposition 4.10 ainsi que le covariant de  $D_D$  utilisé dans  $D$  à l'aide du théorème 2.30. Dans ce dernier cas, on note en examinant la table 7.1 qu'il s'agit d'un covariant dont le poids dans la base des poids fondamentaux de  $D$  est  $-2\omega_i + 2\omega_j$ . Nous noterons le poids de ces covariants  $\mu_1, \dots, \mu_m$  et il sera commode de les inscrire comme les colonnes de la matrice suivante dans la base des poids fondamentaux  $\omega_1, \dots, \omega_m$  correspondant aux racines noires.

$$R = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 2 & -1 & 0 \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Quoique l'objectif est d'obtenir un poids dominant, il est plus commode de commencer par obtenir un caractère plus négatif. Pour  $1 \leq k \leq m-2$ , nous considérons les covariants de la forme

$$\varrho_k := R \cdot (k, k-1, \dots, 2, 1, 0, \dots, 0)^T = (k+1, 0, \dots, 0, \overbrace{-1}^{\text{position } k+1}, 0, \dots, 0)^T_{\omega}.$$

ainsi que

$$\varrho_{m-1} := R \cdot (m-1, m-2, \dots, 2, 1, 0)^T = (m, 0, \dots, 0, -2)^T_{\omega}.$$

Il existe un isomorphisme  $\lambda \sim^0 \lambda - \varrho_k$  obtenu en appliquant à répétition le théorème 2.24 avec successivement les covariants de poids  $\mu_{k-1}, \mu_{k-2}, \dots, \mu_1$  puis  $\mu_{k-2}, \mu_{k-3}, \dots, \mu_1$  et ainsi de suite.

En répétant un nombre approprié de fois, on peut supposer que les seuls poids non nuls de  $\lambda$  sont celui de  $\omega_1$  et celui de  $\omega_m$  qui peut être 0 ou 1. En écrivant le poids de  $\omega_m$  comme  $2\lambda_m + \epsilon$  où  $\epsilon \in \{0, 1\}$ , on obtient plus précisément que

$$\lambda \sim^0 \left( \sum_{i=1}^{m-1} i \lambda_i \right) \omega_1 + \epsilon \omega_m.$$

Il sera donc suffisant de considérer uniquement les caractères  $\lambda$  de la forme  $\lambda_1 \omega_1 + \epsilon \omega_m$ .

## 7. REPRÉSENTANTS DES GROUPES DES CLASSES : TYPE $D$

Enfin, on considère le covariant

$$\tau := R \cdot (1, 1, \dots, 1, 1)^T = (1, 0, \dots, 0)_\omega^T.$$

Dans la mesure où  $\lambda_1 \leq -1$ , il existe un isomorphisme  $\lambda \sim^0 \lambda + \tau$  obtenu en appliquant le théorème 2.24 successivement avec les covariants en poids  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ . En répétant un nombre de fois approprié, on obtient un diagramme de la forme annoncée.

Sous forme de diagramme, nous avons les isomorphismes suivants.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{Diagram 1: A horizontal dashed line with nodes. The first node is open, followed by solid nodes labeled } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1}. \text{ The last node is connected to a vertical line with two branches, one ending in an open circle and the other in a solid circle labeled } 2\lambda_m + \epsilon. \end{array} \\ \sim^0 \begin{array}{c} \text{Diagram 2: A horizontal dashed line with nodes. The first node is open, followed by solid nodes labeled } -\sum_{i=2}^m (i-1)\lambda_i, \sum_{i=1}^m i\lambda_i, 0, 0. \text{ The last node is connected to a vertical line with two branches, one ending in an open circle and the other in a solid circle labeled } \epsilon. \end{array} \\ \sim^0 \begin{array}{c} \text{Diagram 3: A horizontal dashed line with nodes. The first node is open, followed by solid nodes labeled } \sum_{i=1}^m \lambda_i, 0, 0, 0. \text{ The last node is connected to a vertical line with two branches, one ending in an open circle and the other in a solid circle labeled } \epsilon. \end{array} \end{array}$$

Dans le cas où le sous-diagramme  $D_A$  est formé d'un seul bloc de longueur 0, il s'agit d'un diagramme un seul deux de type  $D$  et on obtient le même résultat à l'aide du covariant de la table 7.1.

Maintenant, on considère le cas où le sous-diagramme  $D_A$  est formé de  $k$  séparateurs et donc d'au moins 2 blocs. On peut supposer que le lemme 4.13 a été appliqué à chacun des blocs et que le cas d'un diagramme d'un seul bloc du présent théorème a été appliqué au dernier bloc. On applique ensuite l'hypothèse d'induction au diagramme formé des  $k-1$  derniers séparateurs.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{Diagram 1: A sequence of arcs. The first arc is labeled } \epsilon_1 \text{ and ends in an open circle. The second arc is labeled } \lambda_1 \text{ and ends in a solid circle. The third arc is labeled } \epsilon_2 \text{ and ends in an open circle. The fourth arc is labeled } \lambda_2 \text{ and ends in a solid circle. The fifth arc is labeled } \lambda_{k-1} \text{ and ends in a solid circle. The sixth arc is labeled } \epsilon_k \text{ and ends in an open circle. The seventh arc is labeled } \lambda_k \text{ and ends in a solid circle. The eighth arc is connected to a vertical line with two branches, one ending in an open circle and the other in a solid circle labeled } \epsilon. \end{array} \\ \sim^0 \begin{array}{c} \text{Diagram 2: A sequence of arcs. The first arc is labeled } \epsilon_1 \text{ and ends in an open circle. The second arc is labeled } \mu \text{ and ends in a solid circle. The third arc is labeled } 0 \text{ and ends in an open circle. The fourth arc is labeled } 0 \text{ and ends in a solid circle. The fifth arc is labeled } 0 \text{ and ends in an open circle. The sixth arc is labeled } 0 \text{ and ends in a solid circle. The seventh arc is connected to a vertical line with two branches, one ending in an open circle and the other in a solid circle labeled } \epsilon. \end{array} \end{array}$$

Le poids du premier séparateur est alors

$$\mu = \sum_{i=1}^k \lambda_i + \sum_{i=2}^k \epsilon_i.$$



On applique ensuite le lemme 4.23 sur les  $k - 1$  premiers séparateurs afin d'amener le premier bloc du diagramme à la position du dernier bloc. Enfin, on applique le cas d'un diagramme d'un seul bloc du présent théorème pour conclure.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \mu \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \epsilon_1 \quad \blacksquare \quad 0 \quad \blacksquare \quad \cdots \quad \blacksquare \quad 0 \quad \blacksquare \quad \epsilon \end{array} \\
 \sim^0 \quad \begin{array}{c} \mu + \epsilon_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -\mu - \epsilon_1 \\ \blacksquare \quad 0 \quad \blacksquare \quad 0 \quad \blacksquare \quad 0 \quad \blacksquare \quad \epsilon_1 \end{array} \quad 2\mu + \epsilon \\
 \sim^0 \quad \begin{array}{c} \mu + \epsilon_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \blacksquare \quad 0 \quad \blacksquare \quad 0 \quad \blacksquare \quad 0 \quad \blacksquare \quad 0 \quad \epsilon \end{array}
 \end{array}$$

□

### 7.3 Partition entièrement composée de parties impaires

Nous considérerons 3 types de partitions composées entièrement de parties impaires.

1.  $d$  contient plus de deux parties et au moins un 1 ;
2.  $d$  contient plus de deux parties et ne contient pas de 1 ;
3.  $d$  contient seulement deux parties.

#### La partition contient plus de deux parties et au moins un 1

Dans ce cas, le sous-diagramme  $D_D$  admet un covariant de poids  $2\omega_k$  et la proposition 5.6 s'applique.

**Proposition 7.3.** *Soit  $D$  un diagramme de Dynkin pondéré officiel et pair de type  $D_n$  correspondant à une partition  $d = [d_1, \dots, d_N]$  de  $2n$  où  $d_1 \geq \dots \geq d_N$ . Soit aussi  $G \times^{P^D} \mathfrak{g}_{\geq 2}^D \rightarrow G \mathfrak{g}_{\geq 2}^D$  l'effondrement correspondant. On suppose que la partition  $d$  est formée entièrement de parties impaires, qu'elle contient plus de deux parties, c'est-à-dire que  $N > 2$  et qu'elle contient au moins un 1, c'est-à-dire que  $d_1 = 1$ .*

Supposons que  $D$  comporte au moins deux 2 et posons  $\alpha_i$  et  $\alpha_j$  les deux dernières racines telles que  $D(\alpha_i) = D(\alpha_j) = 2$  et  $j < i$ . On définit  $D_A$  le sous-diagramme comprenant les racines  $\alpha_1$  jusqu'à la racine précédent  $\alpha_j$  et  $D_D$  le sous-diagramme formé de la racine

suivant  $\alpha_i$  jusqu'à  $\alpha_n$ . Dans ce cas, le sous-diagramme  $D_A$  est un diagramme de forme normale et  $D_D$  est un diagramme officiel un seul deux de type  $D$ .

Soit  $\lambda$  un caractère antidominant de  $P^D$ . Il existe un diagramme  $D'$  et un caractère  $\hat{\lambda}$  de  $P^{D'}$  sous la forme normale de la définition 5.2 tel que  $\lambda \sim^0 \hat{\lambda}$ .

De plus, la taille des blocs de  $D'$  est décroissante.

*Démonstration.* Il suffira de montrer que les hypothèses de la proposition 5.6 sont vérifiées.

Comme la partition  $d$  contient au moins un 1, on conclut du tableau 7.1 que la partie  $D_D$  du diagramme admet un covariant un seul deux de poids  $2\omega_j$ . Lorsque ce covariant est vu comme un covariant de  $D$  par le biais du théorème 2.30, son poids est de  $-2\omega_i + 2\omega_j$ .

Toutes les hypothèses de la proposition 5.6 sont vérifiées et le résultat suit.  $\square$

### La partition contient plus de deux parties et ne contient pas de 1

Cette situation est essentiellement la même que celle de la proposition 5.9 où le covariant un seul deux est initialement de poids  $\omega_k$  mais de poids  $2\omega_k$  après avoir procédé à un échange.

**Proposition 7.4.** Soit  $D$  un diagramme de Dynkin pondéré officiel et pair de type  $D_n$  correspondant à une partition  $d = [d_1, \dots, d_N]$  de  $2n$  où  $d_1 \geq \dots \geq d_N$ . Soit aussi  $G \times^{P^D} \mathfrak{g}_{\geq 2}^D \rightarrow G \mathfrak{g}_{\geq 2}^D$  l'effondrement correspondant. On suppose que la partition  $d$  est formée entièrement de parties impaires, qu'elle contient plus de deux parties, c'est-à-dire que  $N > 2$  et qu'elle contient au moins un 1, c'est-à-dire que  $d_1 > 1$ .

Supposons que  $D$  comporte au moins deux 2 et posons  $\alpha_i$  et  $\alpha_j$  les deux dernières racines telles que  $D(\alpha_i) = D(\alpha_j) = 2$  et  $j < i$ . On définit  $D_A$  le sous-diagramme comprenant les racines  $\alpha_1$  jusqu'à la racine précédent  $\alpha_j$  et  $D_D$  le sous-diagramme formé de la racine suivant  $\alpha_i$  jusqu'à  $\alpha_n$ . Dans ce cas, le sous-diagramme  $D_A$  est un diagramme de forme normale et  $D_D$  est un diagramme officiel un seul deux de type  $D$ .

Soit  $\lambda$  un caractère antidominant de  $P^D$ . Il existe un diagramme  $D'$  et un caractère  $\hat{\lambda}$  de  $P^{D'}$  sous la forme normale de la définition 5.2 tel que  $\lambda \sim^0 \hat{\lambda}$  où tous les nœuds du premier bloc ont un poids nul et dans le cas d'un bloc de longueur 0, le premier séparateur ne se voit pas assigner un poids de 1 par la règle 2 de la définition 5.2.

De plus, la taille des blocs de  $D'$  est décroissante.

*Démonstration.* Il suffit d'adapter la preuve de la proposition 5.6 pour tenir compte du nouveau covariant. Dans le type  $D_n$ , un covariant un seul deux de poids  $\omega_k$  n'existe que si  $3k = 2n$ . En particulier, après la première étape de l'induction, c'est-à-dire après avoir effectué un échange au dernier séparateur du sous-diagramme  $D_A$ , les covariants un seul deux du sous-diagramme  $D_D$  seront de poids  $2\omega_k$ . On pourra donc se ramener à l'induction de la proposition 5.6 après le premier échange.

Supposons d'abord que le diagramme  $D_A$  ne contient qu'un seul bloc. Nous considérons dans ce cas le diagramme  $D$  en entier. Nous avons à notre disposition les covariants de type déterminant de la proposition 4.10 ainsi que le covariant de  $D_B$  utilisé dans  $D$  à l'aide du théorème 2.30. Nous notons les poids de ces covariants  $\mu_1, \dots, \mu_m$  et il sera commode de les inscrire comme les colonnes de la matrice suivante dans la base des poids fondamentaux  $\omega_1, \dots, \omega_m$  correspondant aux racines noires.

$$R := \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -1 & 0 & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On procède essentiellement de la même manière que dans le lemme 5.4. Pour  $1 \leq k \leq m-1$ , on considère les covariants de la forme

$$\rho_k := R \cdot (k, k-1, \dots, 2, 1, 0, \dots, 0)^T = (k+1, 0, \dots, 0, \overbrace{-1}^{\text{position } k+1}, 0, \dots, 0)_{\omega}^T.$$

Il existe un isomorphisme  $\lambda \sim^0 \lambda - \rho_k$  obtenu en appliquant à répétition le théorème 2.24 avec successivement les covariants de poids  $\mu_{k-1}, \mu_{k-2}, \dots, \mu_1$  puis  $\mu_{k-2}, \mu_{k-3}, \dots, \mu_1$  et ainsi de suite. En répétant un nombre de fois approprié, on peut supposer que le seul poids non nul de  $\lambda$  soit celui de  $\omega_1$ . Plus précisément, si le poids original était  $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i \omega_i$ , nous obtenons que

$$\lambda \sim^0 \left( \sum_{i=1}^n i \lambda_i \right) \omega_1.$$

Il sera donc suffisant de considérer uniquement les caractères  $\lambda$  de la forme  $\lambda_1 \omega_1$ .

Enfin on considère le covariant

$$\tau := R \cdot (1, 1, \dots, 1, 1)^T = (1, 0, \dots, 0)_\omega^T.$$

Dans la mesure où  $\lambda_1 \leq -1$ , il existe un isomorphisme  $\lambda \sim^0 \lambda + \tau$  obtenu en appliquant à répétition le théorème 2.24 avec successivement les covariants de poids  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ . En répétant un nombre de fois approprié, on obtient un diagramme entièrement nul.

On peut désormais procéder à l'induction comme dans la proposition 5.6 sans autre modification.  $\square$

### La partition ne contient que deux parties

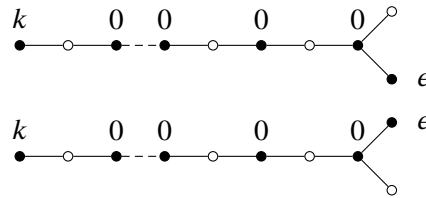
On considère la partition de  $2n$  donnée par  $d = [d_1, d_2]$  où  $d_1$  et  $d_2$  sont impairs et nous supposons que  $d_1 \geq d_2$ . Nous considérerons 3 cas :

1.  $d_1 = d_2 = n$ ;
2.  $d_1 = 2n - 1$  et  $d_2 = 1$ ;
3.  $2n > d_1 > d_2 > 1$ .

**La partition  $d = [d_1, d_2]$  où  $d_1 = d_2 = n$**

**Proposition 7.5.** *Soit  $D$  le diagramme de Dynkin pondéré officiel et pair de type  $D_n$  correspondant à la partition  $d = [n, n]$  où  $n \geq 3$  est impair et  $G \times^{P^D} \mathfrak{g}_{\geq 2}^D \rightarrow G \mathfrak{g}_{\geq 2}^D$  l'effondrement correspondant.*

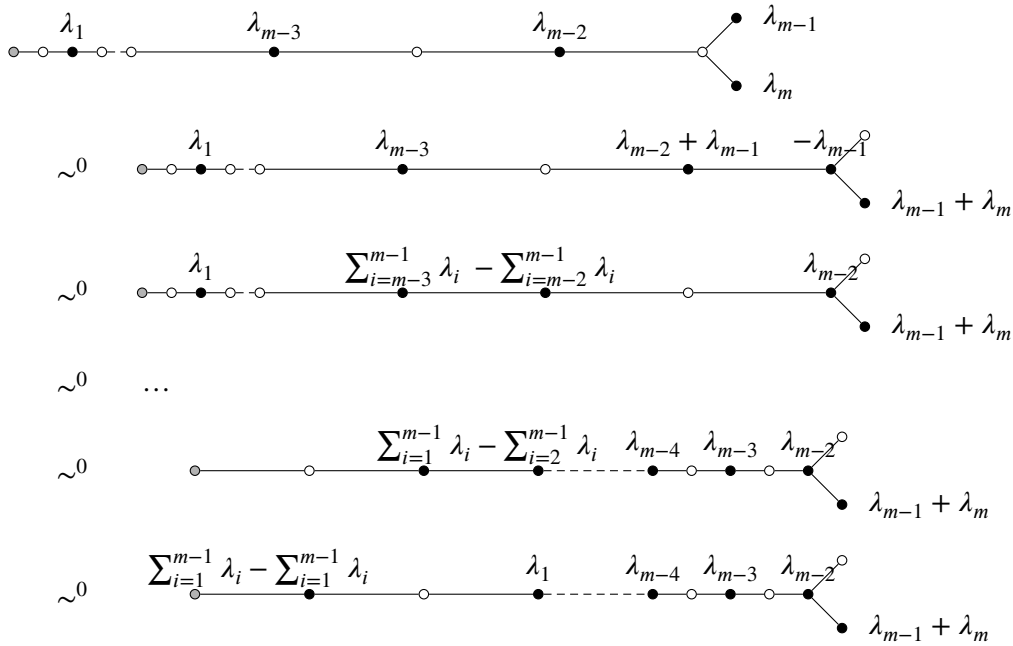
*Soit  $\lambda$  un caractère antidominant de  $P^D$ . Il existe un diagramme  $D^*$  et un caractère  $\lambda^* \in X(P^{D^*})$  tel que  $\lambda \sim^0 \lambda^*$  où  $D^*$  et  $\lambda^*$  sont de l'une ou l'autre des formes suivantes. Dans les deux cas,  $k \geq 0$  et  $\epsilon \in \{0, 1\}$ .*



*Démonstration.* Le diagramme  $D$  est formé d'un unique bloc de taille 1 et de longueur  $\frac{n-3}{2}$  ainsi que des deux racines finales  $\alpha_{n-1}$  et  $\alpha_n$  avec  $D(\alpha_{n-1}) = D(\alpha_n) = 2$ . En posant

$\lambda := \sum_{i=1}^m \lambda_i \omega_i$ , nous supposons dans la démonstration que  $\lambda_{m-1} \leq \lambda_m$ , la situation opposée étant symétrique et obtenue en échangeant le rôle de  $\alpha_{m-1}$  et  $\alpha_m$ .

Nous commençons par effectuer une suite d'échanges aux séparateurs  $k-2, k-3, \dots, 1$  en se servant à chaque fois du théorème 2.26.



Nous avons à notre disposition les covariants de type déterminant de la proposition 4.10 ainsi que le covariant du sous-diagramme de type  $A_1$  formé de la racine  $\alpha_n$ . En se servant du théorème 2.30, ce dernier covariant donne un covariant de poids  $-\omega_{n-2} + 2\omega_n$  dans la base des poids fondamentaux de  $D$ .

Nous noterons le poids de ces covariants  $\mu_1, \dots, \mu_m$  et il sera commode de les inscrire comme les colonnes de la matrice suivante dans la base des poids fondamentaux  $\omega_1, \dots, \omega_m$  correspondant aux racines noires.

$$R := \begin{pmatrix} -1 & & & & & & \\ & 2 & -1 & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & & & -1 & 0 & \\ & & & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & & & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Quoique l'objectif est d'obtenir un poids dominant, il est plus commode de commencer par obtenir un caractère plus négatif. Pour  $1 \leq k \leq m - 2$ , nous considérons les covariants de la forme

$$\varrho_k := R \cdot (k, k-1, \dots, 2, 1, 0, \dots, 0)^T = (-k, k+1, 0, \dots, 0, \overbrace{-1}^{\text{position } k+2}, 0, \dots, 0)^T_\omega$$

ainsi que le covariant

$$\varrho_{n-1} := R \cdot (m-2, m-3, \dots, 2, 1, 0)^T = (-(m-2), m-1, 0, \dots, 0, -2)_{\omega}^T.$$

Il existe un isomorphisme  $\lambda \sim^0 \lambda - \rho_k$  obtenu en appliquant à répétition le théorème 2.24 avec successivement les covariants de poids  $\mu_{k-1}, \mu_{k-2}, \dots, \mu_1$  puis  $\mu_{k-2}, \mu_{k-3}, \dots, \mu_1$  et ainsi de suite.

En répétant un nombre approprié de fois, on obtient un diagramme où les seuls coefficients non nuls sont ceux de  $\omega_1$ ,  $\omega_3$  et  $\omega_n$ . Plus précisément, nous avons l'isomorphisme suivant, où nous avons  $\lambda_{m-1} + \lambda_m$  comme  $2\lambda' + \epsilon$  où  $0 \leq \epsilon \leq 1$ .

$$\begin{array}{c} \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i - \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i \\ \sim^0 \quad \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i \qquad \sum_{i=1}^{m-2} \lambda_i + (m-1)\lambda' \qquad 0 \qquad 0 \\ | \\ -\sum_{i=1}^{m-2} \lambda_i - \lambda_{m-1} - (m-2)\lambda' \end{array}$$



## 7. REPRÉSENTANTS DES GROUPES DES CLASSES : TYPE $D$

---

Similairement, s'il existe un isomorphisme

$$\lambda \sim^0 \lambda^\star = \begin{array}{c} s \\ \bullet \text{---} \circ \text{---} \bullet \\ \phantom{\bullet \text{---} \circ \text{---}} \diagup \diagdown \\ \phantom{\bullet \text{---} \circ \text{---}} \bullet \phantom{\bullet} \end{array} \epsilon$$

pour  $s \geq 0$  et  $\epsilon \in \{0, 1\}$ , alors il existe un isomorphisme

$$\lambda \sim^0 \lambda^- = \begin{array}{c} 0 \\ \circ \text{---} \bullet \text{---} \circ \\ \phantom{\circ \text{---} \bullet \text{---}} \diagup \diagdown \\ \phantom{\circ \text{---} \bullet \text{---}} \bullet \phantom{\bullet} \end{array} -2s - \epsilon.$$

**La partition**  $d = [d_1, d_2]$  où  $d_1 = 2n - 1$  et  $d_2 = 1$

**Proposition 7.7.** Soit  $D$  le diagramme de Dynkin pondéré officiel et pair de type  $D_n$  correspondant à la partition  $d = [1, 2n - 1]$ , c'est-à-dire que  $D$  est le diagramme de l'orbite principale. Soit aussi  $G \times^{P^D} \mathfrak{g}_{\geq 2}^D \rightarrow G \mathfrak{g}_{\geq 2}^D$  l'effondrement correspondant.

Soit  $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$  un caractère antidominant de  $P^D$ . On peut supposer sans perte de généralité que  $\lambda_n \leq \lambda_{n-1}$ . Il existe un isomorphisme  $\lambda \simeq \lambda^\star$  où  $\lambda^\star \in X(P^D)$  est un caractère de la forme

$$\begin{array}{c} \epsilon' \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \bullet \\ \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \\ \phantom{\bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---}} \diagup \diagdown \\ \phantom{\bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---}} \bullet \phantom{\bullet} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ \epsilon \end{array}$$

où  $\epsilon, \epsilon' \in \{0, 1\}$ . Les entiers  $\epsilon$  et  $\epsilon'$  sont respectivement déterminés par les divisions entières

$$\begin{aligned} 2\lambda' + \epsilon &= \lambda_n - \lambda_{n-1} \\ 2\lambda'' + \epsilon' &= \sum_{i=1}^{n-1} i\lambda_i + n\lambda'. \end{aligned}$$

En particulier, si  $n$  est pair,  $\text{Cl}(\mathcal{O}_d)$  est isomorphe à  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ . Il est généré par  $\omega_1$  et  $\omega_n$ . Si  $n$  est impair, alors  $\text{Cl}(\mathcal{O}_d)$  est isomorphe à  $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ . Il est généré par  $\omega_n$ .

*Démonstration.* Comme il s'agit du diagramme de l'orbite principale, il suffira de considérer les covariants des différents sous-diagrammes de type  $A_1$  et de les utiliser dans  $D$  à l'aide du théorème 2.30.



Nous noterons le poids de ces covariants  $\mu_1, \dots, \mu_n$  et il sera commode de les inscrire comme les colonnes de la matrice suivante dans la base des poids fondamentaux  $\omega_1, \dots, \omega_n$ .

$$R := \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 0 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 & -1 \\ & & & 0 & -1 & 2 & 0 \\ & & & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Quoique l'objectif est d'obtenir un poids dominant, il est plus commode de commencer par obtenir un caractère plus négatif. Pour  $1 \leq k \leq n-3$ , nous considérons les covariants de la forme

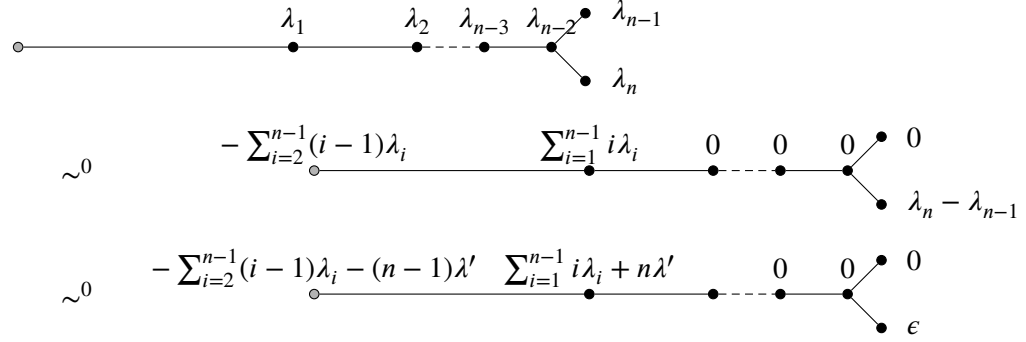
$$\varrho_k := R \cdot (k, k-1, \dots, 2, 1, 0, \dots, 0)^T = (k+1, 0, \dots, 0, \overbrace{-1}^{\text{position } k+1}, 0, \dots, 0)^T_{\omega}.$$

ainsi que les covariants

$$\begin{aligned} \varrho_{n-2} &:= R \cdot (n-2, n-3, \dots, 2, 1, 0, 0)^T = (n-1, 0, \dots, 0, -1, -1)^T_{\omega} \\ \varrho_{n-1} &:= R \cdot (n-1, n-2, \dots, 3, 2, 1, 0)^T = (n, 0, \dots, 0, 0, -2)^T_{\omega} \end{aligned}$$

Il existe un isomorphisme  $\lambda \sim^0 \lambda - \varrho_k$  obtenu en appliquant à répétition le théorème 2.24 avec successivement les covariants de poids  $\mu_{k-1}, \mu_{k-2}, \dots, \mu_1$  puis  $\mu_{k-2}, \mu_{k-3}, \dots, \mu_1$  et ainsi de suite.

En répétant un nombre approprié de fois, on obtient les isomorphismes suivants où nous réécrivons  $\lambda_n - \lambda_{n-1} \leq 0$  comme  $2\lambda' + \epsilon$  avec  $\epsilon \in \{0, 1\}$ .



Enfin, on considère le covariant

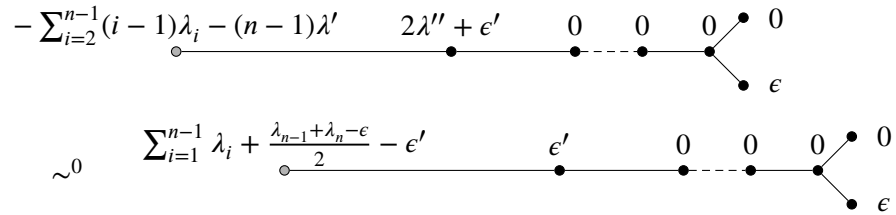
$$\tau := R \cdot (2, 2, \dots, 2, 1, 1) = (2, 0, \dots, 0)_{\omega}^T$$

Dans la mesure où le coefficient de  $\omega_1$  est négatif, il existe un isomorphisme  $\lambda \sim^0 \lambda + \tau$  obtenu en appliquant le théorème 2.24 successivement avec les covariants de poids  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \mu_{n-2}, \mu_{n-1}, \dots, \mu_1$ .

En répétant un nombre de fois approprié et en posant

$$2\lambda'' + \epsilon' = \sum_{i=1}^{n-1} i\lambda_i + n\lambda'$$

avec  $\epsilon' \in \{0, 1\}$ , on obtient l'isomorphisme qui donne la forme désirée.

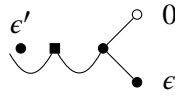


□

**Les partitions  $[d_1, d_2]$  où  $d_1 > d_2$**

**Proposition 7.8.** *Soit  $D$  le diagramme de Dynkin pondéré officiel et pair de type  $D_n$  correspondant à la partition  $d = [d_1, d_2]$  où  $d_1$  et  $d_2$  sont impairs et  $d_1 > d_2 > 1$ . Soit aussi  $G \times^{P^D} \mathfrak{g}_{\geq 2}^D \rightarrow G \mathfrak{g}_{\geq 2}^D$  l'effondrement correspondant.*

*Soit  $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$  un caractère antidominant de  $P^D$ . On peut supposer sans perte de généralité que  $\lambda_n \leq \lambda_{n-1}$ . Il existe un diagramme  $D^*$  et un caractère  $\lambda^* \in X(P^{D^*})$  tel que  $\lambda \simeq \lambda^*$  où le diagramme  $D^*$  et le caractère  $\lambda^*$  sont de la forme*



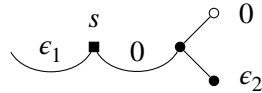
avec  $\epsilon, \epsilon' \in \{0, 1\}$ . Les entiers  $\epsilon$  et  $\epsilon'$  sont respectivement déterminés par les divisions entières

$$2\lambda' + \epsilon = \lambda_n - \lambda_{n-1}$$

$$2\lambda'' + \epsilon' = \sum_{i=1}^{n-1} i\lambda_i + n\lambda'.$$

En particulier, si  $n$  est pair,  $\text{Cl}(\mathcal{O}_d)$  est isomorphe à  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ . Il est généré par  $\omega_1$  et  $\omega_n$ . Si  $n$  est impair, alors  $\text{Cl}(\mathcal{O}_d)$  est isomorphe à  $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ . Il est généré par  $\omega_n$ .

*Démonstration.* Dans ce cas, le diagramme est formé de deux blocs, celui de gauche est de taille 0 et celui de droite est de taille 1. En particulier, on peut appliquer la proposition 7.5 à la partie droite du diagramme. On note que cette proposition modifie le diagramme et en particulier prolonge le bloc de gauche en augmentant sa longueur de 1. On applique ensuite le lemme 4.13 au premier bloc pour obtenir un diagramme de la forme suivante où  $s \leq 0$ , et  $0 \leq \epsilon_1, \epsilon_2 \leq 0$ .



On utilise ensuite le théorème 4.11 pour échanger les blocs.

$$\begin{array}{c} \epsilon_1 \quad s \quad 0 \\ \curvearrowright \quad \quad \quad \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \quad \bullet \quad \bullet \end{array} \quad \sim^0 \quad \begin{array}{c} -s - \epsilon_1 \quad 0 \\ \curvearrowright \quad \quad \quad \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \quad \bullet \quad \bullet \end{array} \quad \begin{array}{c} 0 \\ 2\lambda_s + \epsilon_2 \end{array}$$

On applique une seconde fois la proposition 7.7 à la partie droite du diagramme. Cette proposition indique aussi comment modifier le poids du séparateur.

Dans les notations de la proposition 7.7,  $\epsilon$  et  $\epsilon'$  sont donnés par les divisions

$$2\lambda' + \epsilon = 2\lambda_s + \epsilon_2$$

$$2\lambda'' + \epsilon' = \delta_1 + n\lambda_s$$

où  $\delta_1$  est l'indice du 1 si  $\epsilon_1 = 1$  et 0 sinon. Nous obtenons donc le diagramme suivant

$$\begin{array}{c} -\epsilon_3 \quad \epsilon_3 \quad 0 \\ \curvearrowright \quad \quad \quad \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \quad \bullet \quad \bullet \end{array} \quad \begin{array}{c} 0 \\ \epsilon_2 \end{array}$$

où  $\epsilon_3$  est le reste de la division de  $\delta_1 + ns$  par 2.

Enfin, pour obtenir un caractère dominant, on échange à nouveau les blocs.

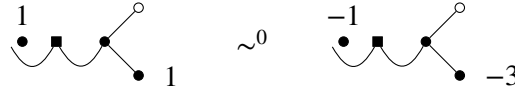
$$\begin{array}{c} \epsilon_3 \quad 0 \\ \curvearrowright \quad \quad \quad \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \quad \bullet \quad \bullet \end{array} \quad \begin{array}{c} \epsilon_2 \end{array}$$

□

**Corollaire 7.9.** Soit  $D$  le diagramme de Dynkin pondéré officiel et pair de type  $D_n$  correspondant à la partition  $d = [d_1, d_2]$  où  $d_1$  et  $d_2$  sont impairs et  $d_1 \geq d_2$ . Soit aussi  $G \times^{P^D} \mathfrak{g}_{\geq 2}^D \rightarrow G \mathfrak{g}_{\geq 2}^D$  l'effondrement correspondant.

Soit  $\lambda^*$  un des caractères dominants de la proposition 7.7 ou de la proposition 7.8. Il existe un diagramme  $D^-$  et un caractère antidominant  $\lambda^- \in X(P^{D^-})$  tel que  $\lambda^* \sim^0 \lambda^-$ . Spécifiquement, nous avons, quelle que soit la parité de  $n$ , les isomorphismes suivants.

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} 1 \\ \bullet \end{array} \quad \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} & \sim^0 & \begin{array}{c} -1 \\ \bullet \end{array} \quad \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ \bullet \end{array} \quad \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} & \sim^0 & \begin{array}{c} 0 \\ \bullet \end{array} \quad \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \end{array} & & \begin{array}{c} -3 \end{array} \end{array}$$



## 7.4 Autres diagrammes

Il reste à considérer les cas simples du diagramme nul et des diagrammes un seul deux.

**Proposition 7.10.** Soit  $D$  le diagramme de l'orbite nulle de type  $D_n$  et  $G \times^{P^D} \mathfrak{g}_{\geq 2}^D \rightarrow G \mathfrak{g}_{\geq 2}^D$  l'effondrement correspondant. Soit  $\lambda \in X(P^D)$  un caractère, alors  $\lambda = 0$ .

**Proposition 7.11.** Soit  $D$  un diagramme de Dynkin USD de type  $D_n$  et  $G \times^{P^D} \mathfrak{g}_{\geq 2}^D \rightarrow G \mathfrak{g}_{\geq 2}^D$  l'effondrement correspondant. Posons  $\alpha_k$  pour l'unique racine telle que  $D(\alpha_k) = 2$ .

Soit  $\lambda$  un caractère antidominant de  $P^D$ .

1. Si  $3k = 2n + 1$ , alors  $\lambda \sim^0 0$ .
2. Si  $3k < 2n + 1$  ou si  $k = n$ , alors  $\lambda \sim^0 \lambda^*$  où  $\lambda^*$  est 0 ou  $\omega_k$ .

Similairement si  $3k < 2n + 1$  ou si  $k = n$ , alors  $\lambda \sim \lambda^-$  où  $\lambda^-$  est 0 ou  $-\omega_k$ .

*Démonstration.* Il suffira de consulter à la table 7.1. □

## 7.5 Représentants dominants et antidominants

Nous avons déjà produit des représentants dominants dans tous les cas à l'exception de celui d'une partition entièrement composée de parties impaires et comptant plus de deux parties. Nous avons toutefois discuté aux propositions 7.3 et 7.4 que les hypothèses de la proposition 5.6 s'appliquent. En particulier, on peut obtenir des représentants dominants et antidominants en appliquant le théorème 5.11.

## 7.6 Représentants unifiés

Une préoccupation compréhensible est que ces formes normales sont des constructions ad hoc plutôt que des constructions systématiques. Des travaux sont en cours pour remédier à cet inconvénient (A. Broer, communication personnelle, 2016).

Soit  $D$  un diagramme tel que l'effondrement  $G \times^P \mathfrak{g}_{\geq 2} \rightarrow G \mathfrak{g}_{\geq 2}$  soit génériquement fini et supposons que le groupe des classes de la variété nilpotente  $N$  correspondante est fini.

En utilisant la proposition 2.9, il existe un isomorphisme  $\text{Cl}(N) \simeq X(P)/\mathbb{Z}\Lambda$  où  $\Lambda := \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  est l'ensemble des poids des  $P$ -covariants irréductibles. Comme on suppose le groupe des classes fini,  $\Lambda$  forme une base du  $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel  $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} X(P)$ .

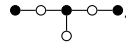
On définit un ensemble de représentants comme les poids minimaux non négatifs en regard de l'ordre partiel  $\lambda \leq \mu$  si  $\mu - \lambda \in \mathbb{Z}^{\geq 0}\Lambda$ . De manière équivalente, il s'agit des poids de  $X(P)$  qui s'écrivent comme

$$\lambda = \sum_{\substack{0 \leq q_i < 1 \\ q_i \in \mathbf{Q}}} q_i \beta_i.$$

Il est connu que ces poids sont réflexifs et forment un ensemble de représentants du groupe des classes, généralement distincts de ceux qui suivent dans les tables.

Il n'est pas connu, mais toutefois espéré, que ces représentants ont une annulation en cohomologie  $H^i(G \times^P \mathfrak{n}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{n}}(\mathbf{C}_\lambda)^*) = 0$  pour  $i \geq 1$ .

Comme exemple, on considère le diagramme  $E_6(a_3)$  suivant



L'effondrement est génériquement fini étant donné que le diagramme est pair. En consultant la table 8.1, on aura que  $\text{Cl}(N) \simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  et les poids des covariants irréductibles sont

$$\begin{aligned} \beta_1 &:= \begin{array}{ccccc} -1 & 0 & & 2 & \\ \bullet & \circ & \bullet & \circ & \bullet \\ & & \circ & & \end{array} \\ \beta_2 &:= \begin{array}{ccccc} -2 & 2 & & -2 & \\ \bullet & \circ & \bullet & \circ & \bullet \\ & & \circ & & \end{array} \\ \beta_3 &:= \begin{array}{ccccc} 2 & 0 & & -1 & \\ \bullet & \circ & \bullet & \circ & \bullet \\ & & \circ & & \end{array} \end{aligned}$$

Les poids décrits ci-haut sont alors

$$\begin{array}{c} -1 \quad 1 \quad -1 \\ \bullet - \circ - \bullet \\ \quad \quad \quad \circ \end{array} = \frac{1}{2}\beta_2$$

$$\begin{array}{c} 1 \quad 0 \quad 0 \\ \bullet - \circ - \bullet \\ \quad \quad \quad \circ \end{array} = \frac{1}{3}\beta_1 + \frac{2}{3}\beta_3$$

$$\begin{array}{c} 0 \quad 1 \quad -1 \\ \bullet - \circ - \bullet \\ \quad \quad \quad \circ \end{array} = \frac{1}{3}\beta_1 + \frac{1}{2}\beta_2 + \frac{2}{3}\beta_3$$

$$\begin{array}{c} 0 \quad 0 \quad 1 \\ \bullet - \circ - \bullet \\ \quad \quad \quad \circ \end{array} = \frac{2}{3}\beta_1 + \frac{1}{3}\beta_3$$

$$\begin{array}{c} -1 \quad 1 \quad 0 \\ \bullet - \circ - \bullet \\ \quad \quad \quad \circ \end{array} = \frac{2}{3}\beta_1 + \frac{1}{2}\beta_2 + \frac{1}{3}\beta_3$$

$$\begin{array}{c} 0 \quad 0 \quad 0 \\ \bullet - \circ - \bullet \\ \quad \quad \quad \circ \end{array} = 0.$$





## Chapitre 8

# Représentants des groupes des classes : types exceptionnels

Ce chapitre est dédié aux tableaux présentant les différents représentants des groupes des classes des orbites nilpotentes de groupes de type  $E$ ,  $F$  ou  $G$  respectivement dans les tables 8.6, 8.7, 8.8, 8.9 et 8.10. Les représentants dominants des groupes des classes sont obtenus par des applications répétées et semi-automatisées des isomorphismes de la section 2.11. L'exemple 2.32 illustre ce procédé.

*Remarque 8.1.*

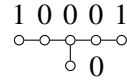
1. Nous avons dans tous les cas omis le module trivial.
2. La structure de groupe est sous-entendue dans l'ordre de présentation des représentants dominants. Dans les cas des groupes cycliques  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$  et  $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ , le premier module indiqué est un générateur et les modules suivants sont les puissances successives.
3. Comme indiqué à la section 2.11, nous dénotons par  $\sim^0$  l'existence d'un isomorphisme pour uniquement  $H^0$  tandis que  $\sim$  dénote l'existence d'un isomorphisme pour tout  $H^i$ ,  $i \geq 0$ .

Pour ce qui est des  $P^D$ -covariants de  $\mathfrak{n}^D$ , une liste exhaustive est publiée dans [28]. Toutefois, cette source n'indique pas directement les poids de ces covariants. Nous prendrons donc le temps de recopier les tableaux de cet article en donnant directement les poids des covariants et leur degré. On pourra par la même occasion obtenir le groupe des classes de chacune des orbites. Ces résultats figurent aux tables 8.1, 8.2, 8.3, 8.4 et 8.5. Les exemples 8.2 et 8.3 illustrent comment ces poids sont calculés à partir des résultats de [28]. Cette présentation des poids s'avère plus utile dans les applications, notamment pour l'étude de la normalité des variétés nilpotentes.

Nous présenterons les poids des covariants obtenus sous la forme d'une matrice où chaque ligne indique le poids d'un covariant dans la base des poids fondamentaux, en omettant ceux correspondant à une racine simple  $\alpha$  telle que  $D(\alpha) = 0$ . Il s'agit en particulier de la matrice des relations permettant d'obtenir le groupe des classes comme un quotient de  $X(P)$ .

On note que dans le cas de l'orbite régulière, cette matrice se ramène à la matrice de Cartan du système de racines. Il s'agit alors de la matrice des relations permettant d'obtenir le groupe fondamental comme quotient du réseau des poids. Ces similarités nous motivent à appeler ces matrices des *matrices de Cartan généralisées*.

*Exemple 8.2.* Considérons l'orbite  $2A_1$  d'un groupe de type  $E_6$  dont le diagramme de Dynkin pondéré est le suivant.



Soit  $P = LU$  le sous-groupe parabolique correspondant et une décomposition de Levi. Le type de  $L'$  se lit directement du diagramme en considérant les racines simples  $\alpha$  telles que  $D(\alpha) = 0$ . En particulier ici, le  $L'$  est de type  $D_4$ . De plus, la dimension du centre de  $L$  est donnée par le nombre de racines effacées. Les tableaux de [28] nous informent alors que  $\mathfrak{g}_2$  est un  $L'$ -module de plus haut poids  $\omega_2$ , qu'il s'agit d'un espace préhomogène isomorphe à la représentation standard de  $SO_8$  et enfin qu'un tel espace préhomogène admet un  $L'$ -covariant de degré 2.

Nous désirons obtenir l'action de  $L$  sur  $\mathfrak{g}_2$ . On note que dans  $E_6$ ,

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & & & & \circ & & \\ & & & & 1 & & \end{array} \right\}_{\omega} = \left\{ \begin{array}{ccccccc} & & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ & & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & & & & \circ & & \\ & & & & 2 & & \end{array} \right\}_{\alpha}$$

et que dans  $D_4$ ,

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \ 0 \ 0 \\ \circ - \circ - \circ \\ | \\ 1 \end{array} \right\}_\omega = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2} \ 1 \ \frac{1}{2} \\ \circ - \circ - \circ \\ | \\ 1 \end{array} \right\}_\alpha.$$

On conclut donc que  $L$  et donc  $P$  agit avec poids

$$2 \left( \left\{ \begin{array}{c} 1 \ 2 \ 3 \ 2 \ 1 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ | \\ 2 \end{array} \right\}_\alpha - \left\{ \begin{array}{c} 0 \ \frac{1}{2} \ 1 \ \frac{1}{2} \ 0 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ | \\ 1 \end{array} \right\}_\alpha \right) = \left\{ \begin{array}{c} 2 \ 3 \ 4 \ 3 \ 2 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ | \\ 2 \end{array} \right\}_\alpha = \left\{ \begin{array}{c} 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ | \\ 0 \end{array} \right\}_\omega.$$

*Exemple 8.3.* Dans certains cas, notamment ceux où le groupe des classes est fini, il est possible de déduire les poids des covariants plus rapidement. Le poids d'un covariant  $\lambda$  vérifie les deux propriétés suivantes :

1. Dans la base des poids fondamentaux, les coefficients de  $\lambda$  sont nuls sur les poids fondamentaux correspondant aux racines simples  $\alpha$  telles que  $D(\alpha) > 0$ .
2. Dans la base des racines simples, les coefficients de  $\lambda$  sur les racines simples  $\alpha$  telles que  $D(\alpha) = 0$  sont donnés par le produit matriciel du multidegré et des hauts poids de  $\mathfrak{g}_2$ .

Par exemple, considérons l'orbite  $2A_2$  d'un groupe de type  $E_6$  dont le diagramme de Dynkin pondéré est le suivant.

$$\begin{array}{c} 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ | \\ 0 \end{array}$$

Les tableaux de [28] nous informent alors que  $\mathfrak{g}_2$  est un  $L'$ -module de plus haut poids

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ -1 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ | \\ 0 \end{array} \right\}_\omega = \left\{ \begin{array}{c} 1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 0 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ | \\ 1 \end{array} \right\}_\alpha$$

et

$$\left\{ \begin{array}{c} -10 \ 0 \ 1 \ 0 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ | \\ 0 \end{array} \right\}_\omega = \left\{ \begin{array}{c} 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 1 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ | \\ 1 \end{array} \right\}_\alpha.$$

De plus, il existe deux  $L'$ -covariants respectivement de multidegrés  $(2, 0)$  et  $(0, 2)$ . On peut alors calculer les poids de ces deux covariants en résolvant respectivement les systèmes d'équations linéaires

$$\left\{ \begin{array}{c} 2 \ x_2 x_3 x_4 \ 0 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ | \\ x_1 \end{array} \right\}_\alpha = \left\{ \begin{array}{c} x_5 \ 0 \ 0 \ 0 \ x_6 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ | \\ 0 \end{array} \right\}_\alpha$$

## 8. REPRÉSENTANTS DES GROUPES DES CLASSES : TYPES EXCEPTIONNELS

et

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \ x_2 x_3 x_4 \ 2 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ \quad \quad \quad \circ \\ \quad \quad \quad x_1 \end{array} \right\}_\alpha = \left\{ \begin{array}{c} x_5 \ 0 \ 0 \ 0 \ x_6 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ \quad \quad \quad \circ \\ \quad \quad \quad 0 \end{array} \right\}_\alpha.$$

On obtient respectivement  $x = (1, 2, 2, 1, -1, 2)$  et  $x = (1, 1, 2, 2, 2, -1)$  et donc les poids des covariants sont donnés, dans la base des poids fondamentaux par  $\begin{array}{c} 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ \quad \quad \quad \circ \\ \quad \quad \quad 0 \end{array}$  et

$$\begin{array}{c} -10 \ 0 \ 0 \ 2 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ \quad \quad \quad \circ \\ \quad \quad \quad 0 \end{array}.$$

$E_6$				
Orbite	Diagramme	Covariants	Degrés	$\text{Cl}(\mathcal{O})$
$A_1$	$\begin{array}{c} 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ \quad \quad \quad \circ \\ \quad \quad \quad 1 \end{array}$	$(1)$	1	0
$2A_1$	$\begin{array}{c} 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ \quad \quad \quad \circ \\ \quad \quad \quad 0 \end{array}$	$(1 \ 1)$	2	$\mathbf{Z}$
$3A_1$	$\begin{array}{c} 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ \quad \quad \quad \circ \\ \quad \quad \quad 0 \end{array}$	$(1)$	3	0
$A_2$	$\begin{array}{c} 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ \quad \quad \quad \circ \\ \quad \quad \quad 2 \end{array}$	$(2)$	4	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$A_2 + A_1$	$\begin{array}{c} 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ \quad \quad \quad \circ \\ \quad \quad \quad 1 \end{array}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}$	$\mathbf{Z}$
$2A_2$	$\begin{array}{c} 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ \quad \quad \quad \circ \\ \quad \quad \quad 0 \end{array}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{2}{2}$	$\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$
$A_2 + 2A_1$	$\begin{array}{c} 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ \quad \quad \quad \circ \\ \quad \quad \quad 0 \end{array}$	$(1 \ 1)$	6	$\mathbf{Z}$

---

$E_6$ (suite)				
Orbite	Diagramme	Covariants	Degrés	$\text{Cl}(\mathcal{O})$
$A_3$	$\begin{array}{c} 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\   \\ \circ \end{array}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}$	$\mathbf{Z}$
$2A_2 + A_1$	$\begin{array}{c} 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\   \\ \circ \end{array}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{2}{2}$	$\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$
$A_3 + A_1$	$\begin{array}{c} 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\   \\ \circ \end{array}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\frac{3}{2}$	$\mathbf{Z}$
$D_4(a_1)$	$\begin{array}{c} 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\   \\ \circ \end{array}$	$(2)$	12	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$A_4$	$\begin{array}{c} 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\   \\ \circ \end{array}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\frac{2}{2}$	$\mathbf{Z}$
$D_4$	$\begin{array}{c} 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\   \\ \circ \end{array}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3}$	0
$A_4 + A_1$	$\begin{array}{c} 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\   \\ \circ \end{array}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\frac{2}{1}$ $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{1}$	$\mathbf{Z}$
$A_5$	$\begin{array}{c} 2 \ 1 \ 0 \ 1 \ 2 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\   \\ \circ \end{array}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{1}$ $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{1}$	$\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$
$D_5(a_1)$	$\begin{array}{c} 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\   \\ \circ \end{array}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\frac{2}{2}$ $\frac{2}{2}$ $\frac{2}{1}$	$\mathbf{Z}$
$E_6(a_3)$	$\begin{array}{c} 2 \ 0 \ 2 \ 0 \ 2 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\   \\ \circ \end{array}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$	$\frac{4}{4}$ $\frac{4}{4}$	$\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$

---

8. REPRÉSENTANTS DES GROUPES DES CLASSES : TYPES EXCEPTIONNELS

$E_6$ (suite)				
Orbite	Diagramme	Covariants	Degrés	$\text{Cl}(\mathcal{O})$
$D_5$	$\begin{array}{c} 2 \ 0 \ 2 \ 0 \ 2 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\   \\ \circ \end{array}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}$	$\mathbf{Z}$
$E_6(a_1)$	$\begin{array}{c} 2 \ 2 \ 0 \ 2 \ 2 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\   \\ \circ \end{array}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}$	$\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$
$E_6$	$\begin{array}{c} 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\   \\ \circ \end{array}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$	$\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$

TABLE 8.1 – Covariants pour  $E_6$

$E_7$				
Orbite	Diagramme	Covariants	Degrés	$\text{Cl}(\mathcal{O})$
$A_1$	$\begin{array}{c} 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\   \\ \circ \end{array}$	(1)	1	0
$2A_1$	$\begin{array}{c} 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\   \\ \circ \end{array}$	(1)	2	0
$(3A_1)''$	$\begin{array}{c} 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\   \\ \circ \end{array}$	(2)	3	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$(3A_1)'$	$\begin{array}{c} 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\   \\ \circ \end{array}$	(1)	3	0
$A_2$	$\begin{array}{c} 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\   \\ \circ \end{array}$	(2)	4	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$

$E_7$ (suite)				
Orbite	Diagramme	Covariants	Degrés	$\text{Cl}(\mathcal{O})$
$4A_1$	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 1 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$A_2 + A_1$	$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{4}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$A_2 + 2A_1$	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$(1)$	6	0
$A_3$	$\begin{array}{ccccccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\frac{2}{1}$	0
$2A_2$	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$(1)$	4	0
$A_2 + 3A_1$	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 2 & & & & \end{array}$	$(2)$	7	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$(A_3 + A_1)''$	$\begin{array}{ccccccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{2}{3}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$2A_2 + A_1$	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{4}$	0
$(A_3 + A_1)'$	$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\frac{3}{2}$	0
$D_4(a_1)$	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$(2)$	12	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$

8. REPRÉSENTANTS DES GROUPES DES CLASSES : TYPES EXCEPTIONNELS

$E_7$ (suite)				
Orbite	Diagramme	Covariants	Degrés	$\text{Cl}(\mathcal{O})$
$A_3 + 2A_1$	$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$D_4$	$\begin{array}{ccccccc} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3}$	0
$D_4(a_1) + A_1$	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 1 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{4}$ $\frac{4}{4}$	$(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$
$A_3 + A_2$	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$	$\frac{4}{6}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$A_4$	$\begin{array}{ccccccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{2}{4}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$A_3 + A_2 + A_1$	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	(2)	15	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$(A_5)''$	$\begin{array}{ccccccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{2}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$D_4 + A_1$	$\begin{array}{ccccccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 1 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{1}$ $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{2}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$A_4 + A_1$	$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{2}{1}$ $\frac{1}{4}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$D_5(a_1)$	$\begin{array}{ccccccc} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{4}{1}$ $\frac{1}{4}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$



$E_7$ (suite)				
Orbite	Diagramme	Covariants	Degrés	$\text{Cl}(\mathcal{O})$
$A_4 + A_2$	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & 0 & & \end{array}$	$(1)$	12	0
$(A_5)'$	$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & 0 & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$	0
$A_5 + A_1$	$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & 0 & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$D_5(a_1) + A_1$	$\begin{array}{ccccccc} 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & 0 & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 5 \\ 6 \end{smallmatrix}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$D_6(a_2)$	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & 1 & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{smallmatrix}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$E_6(a_3)$	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & 0 & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 8 \\ 4 \end{smallmatrix}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$D_5$	$\begin{array}{ccccccc} 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & 0 & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}$	0
$E_7(a_5)$	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & 0 & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 9 \\ 12 \end{smallmatrix}$	$(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$
$A_6$	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & 0 & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 2 \\ 6 \end{smallmatrix}$	0
$D_5 + A_1$	$\begin{array}{ccccccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & 1 & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$

8. REPRÉSENTANTS DES GROUPES DES CLASSES : TYPES EXCEPTIONNELS

$E_7$ (suite)				
Orbite	Diagramme	Covariants	Degrés	$\text{Cl}(\mathcal{O})$
$D_6(a_1)$	$\begin{array}{c} 2 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 2 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\   \\ \circ \ 1 \end{array}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$E_7(a_4)$	$\begin{array}{c} 2 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 2 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\   \\ \circ \ 0 \end{array}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{matrix}$	$(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$
$D_6$	$\begin{array}{c} 2 \ 1 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\   \\ \circ \ 1 \end{array}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$E_6(a_1)$	$\begin{array}{c} 2 \ 0 \ 2 \ 0 \ 2 \ 0 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\   \\ \circ \ 0 \end{array}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{matrix}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$E_6$	$\begin{array}{c} 2 \ 2 \ 2 \ 0 \ 2 \ 0 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\   \\ \circ \ 0 \end{array}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}$	0
$E_7(a_3)$	$\begin{array}{c} 2 \ 0 \ 2 \ 0 \ 2 \ 2 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\   \\ \circ \ 0 \end{array}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{matrix}$	$(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$
$E_7(a_2)$	$\begin{array}{c} 2 \ 2 \ 0 \ 2 \ 0 \ 2 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\   \\ \circ \ 2 \end{array}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$E_7(a_1)$	$\begin{array}{c} 2 \ 2 \ 0 \ 2 \ 2 \ 2 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\   \\ \circ \ 2 \end{array}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$E_7$	$\begin{array}{c} 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\   \\ \circ \ 2 \end{array}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$

TABLE 8.2 – Covariants pour  $E_7$

---

$E_8$				
Orbite	Diagramme	Covariants	Degrés	$\text{Cl}(\mathcal{O})$
$A_1$	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	(1)	1	0
$2A_1$	$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	(1)	2	0
$3A_1$	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	(1)	3	0
$A_2$	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	(2)	4	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$4A_1$	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 1 & & & & \end{array}$	(1)	4	0
$A_2 + A_1$	$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{4}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$A_2 + 2A_1$	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	(1)	6	0
$A_3$	$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\frac{2}{1}$	0
$A_2 + 3A_1$	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	(1)	7	0
$2A_2$	$\begin{array}{ccccccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	(2)	8	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$

---

8. REPRÉSENTANTS DES GROUPES DES CLASSES : TYPES EXCEPTIONNELS

$E_8$ (suite)				
Orbite	Diagramme	Covariants	Degrés	$\text{Cl}(\mathcal{O})$
$2A_2 + A_1$	$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{4}$	0
$A_3 + A_1$	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$	$\frac{3}{2}$	0
$D_4(a_1)$	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	(2)	12	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$D_4$	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3}$	0
$2A_2 + 2A_1$	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	(1)	10	0
$A_3 + 2A_1$	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 1 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$	$\frac{3}{3}$	0
$D_4(a_1) + A_1$	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 1 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{12}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$A_3 + A_2$	$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$	$\frac{4}{6}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$A_4$	$\begin{array}{ccccccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$	$\frac{2}{4}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$A_3 + A_2 + A_1$	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	(1)	15	0

$E_8$ (suite)				
Orbite	Diagramme	Covariants	Degrés	$\text{Cl}(\mathcal{O})$
$D_4 + A_1$	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & 1 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3}$	0
$D_4(a_1) + A_2$	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & 2 & & & & \end{array}$	(2)	16	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$A_4 + A_1$	$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{4}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$2A_3$	$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\frac{4}{2}$	0
$D_5(a_1)$	$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\frac{4}{4}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$A_4 + 2A_1$	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$	$\frac{8}{6}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$A_4 + A_2$	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	(1)	12	0
$A_5$	$\begin{array}{ccccccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{2}{2}$	0
$D_5(a_1) + A_1$	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$	$\frac{5}{6}$	0
$A_4 + A_2 + A_1$	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{12}$	0

8. REPRÉSENTANTS DES GROUPES DES CLASSES : TYPES EXCEPTIONNELS

$E_8$ (suite)				
Orbite	Diagramme	Covariants	Degrés	$\text{Cl}(\mathcal{O})$
$D_4 + A_2$	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & 2 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$	$\frac{5}{7}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$E_6(a_3)$	$\begin{array}{ccccccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{4}{8}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$D_5$	$\begin{array}{ccccccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3}$	0
$A_4 + A_3$	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$	$\frac{6}{3}$	0
$A_5 + A_1$	$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\frac{3}{2}$	0
$D_5(a_1) + A_2$	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$	$\frac{4}{4}$	0
$D_6(a_2)$	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & 1 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\frac{6}{4}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$E_6(a_3) + A_1$	$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{4}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$E_7(a_5)$	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$	$\frac{9}{12}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$D_5 + A_1$	$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3}$	0

$E_8$ (suite)				
Orbite	Diagramme	Covariants	Degrés	$\text{Cl}(\mathcal{O})$
$E_8(a_7)$	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$(2)$	40	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$A_6$	$\begin{array}{ccccccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{2}{6}$	0
$D_6(a_1)$	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 1 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{4}$ $\frac{4}{4}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$A_6 + A_1$	$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{2}{1}$ $\frac{6}{6}$	0
$E_7(a_4)$	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$	$\frac{7}{4}$ $\frac{6}{6}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$E_6(a_1)$	$\begin{array}{ccccccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$	$\frac{4}{2}$ $\frac{2}{4}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$D_5 + A_2$	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$	$\frac{7}{15}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$D_6$	$\begin{array}{ccccccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 1 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{1}$ $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{2}$	0
$E_6$	$\begin{array}{ccccccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{1}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{2}$	0
$D_7(a_2)$	$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & \circ & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$	$\frac{6}{2}$ $\frac{2}{1}$ $\frac{1}{4}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$

8. REPRÉSENTANTS DES GROUPES DES CLASSES : TYPES EXCEPTIONNELS

$E_8$ (suite)				
Orbite	Diagramme	Covariants	Degrés	$\text{Cl}(\mathcal{O})$
$A_7$	$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$	0
$E_6(a_1) + A_1$	$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{matrix}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$E_7(a_3)$	$\begin{array}{ccccccc} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} 4 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \end{matrix}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$E_8(b_6)$	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} 16 \\ 12 \end{matrix}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$D_7(a_1)$	$\begin{array}{ccccccc} 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$E_6 + A_1$	$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$	0
$E_7(a_2)$	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & 1 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}$	0
$E_8(a_6)$	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} 12 \\ 12 \end{matrix}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$D_7$	$\begin{array}{ccccccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & 1 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$	0
$E_8(b_5)$	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & &   & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ 9 \\ 12 \end{matrix}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$



$E_8$ (suite)				
Orbite	Diagramme	Covariants	Degrés	$\text{Cl}(\mathcal{O})$
$E_7(a_1)$	$\begin{array}{c} 2 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 2 \ 2 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\   \\ \circ \\ 1 \end{array}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$	0
$E_8(a_5)$	$\begin{array}{c} 2 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\   \\ \circ \\ 0 \end{array}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{matrix}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$E_8(b_4)$	$\begin{array}{c} 2 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 2 \ 2 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\   \\ \circ \\ 0 \end{array}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ 7 \\ 4 \\ 6 \end{matrix}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$E_7$	$\begin{array}{c} 2 \ 1 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\   \\ \circ \\ 1 \end{array}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$	0
$E_8(a_4)$	$\begin{array}{c} 2 \ 0 \ 2 \ 0 \ 2 \ 0 \ 2 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\   \\ \circ \\ 0 \end{array}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ 4 \end{matrix}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$E_8(a_3)$	$\begin{array}{c} 2 \ 0 \ 2 \ 0 \ 2 \ 2 \ 2 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\   \\ \circ \\ 0 \end{array}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{matrix}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$E_8(a_2)$	$\begin{array}{c} 2 \ 2 \ 0 \ 2 \ 0 \ 2 \ 2 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\   \\ \circ \\ 2 \end{array}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}$	0
$E_8(a_1)$	$\begin{array}{c} 2 \ 2 \ 0 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\   \\ \circ \\ 2 \end{array}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}$	0
$E_8$	$\begin{array}{c} 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\   \\ \circ \\ 2 \end{array}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$	0

TABLE 8.3 – Covariants pour  $E_8$

# 8. REPRÉSENTANTS DES GROUPES DES CLASSES : TYPES EXCEPTIONNELS

$F_4$				
Orbite	Diagramme	Covariants	Degrés	$\text{Cl}(\mathcal{O})$
$A_1$	$\begin{array}{c} 1\ 0\ 0\ 0 \\ \circ - \circ \rightarrow \circ - \circ \end{array}$	$(1)$	1	0
$\widetilde{A}_1$	$\begin{array}{c} 0\ 0\ 0\ 1 \\ \circ - \circ \rightarrow \circ - \circ \end{array}$	$(2)$	2	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$A_1 + \widetilde{A}_1$	$\begin{array}{c} 0\ 1\ 0\ 0 \\ \circ - \circ \rightarrow \circ - \circ \end{array}$	$(1)$	3	0
$A_2$	$\begin{array}{c} 2\ 0\ 0\ 0 \\ \circ - \circ \rightarrow \circ - \circ \end{array}$	$(2)$	4	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$\widetilde{A}_2$	$\begin{array}{c} 0\ 0\ 0\ 2 \\ \circ - \circ \rightarrow \circ - \circ \end{array}$	$(1)$	2	0
$A_2 + \widetilde{A}_1$	$\begin{array}{c} 0\ 0\ 1\ 0 \\ \circ - \circ \rightarrow \circ - \circ \end{array}$	$(1)$	3	0
$B_2$	$\begin{array}{c} 2\ 0\ 0\ 1 \\ \circ - \circ \rightarrow \circ - \circ \end{array}$	$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$\widetilde{A}_2 + A_1$	$\begin{array}{c} 0\ 1\ 0\ 1 \\ \circ - \circ \rightarrow \circ - \circ \end{array}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}$	0
$C_3(a_1)$	$\begin{array}{c} 1\ 0\ 1\ 0 \\ \circ - \circ \rightarrow \circ - \circ \end{array}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$F_4(a_3)$	$\begin{array}{c} 0\ 2\ 0\ 0 \\ \circ - \circ \rightarrow \circ - \circ \end{array}$	$(2)$	12	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$

---

$F_4$ (suite)				
Orbite	Diagramme	Covariants	Degrés	$\text{Cl}(\mathcal{O})$
$B_3$	$\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 0 & 0 \\ \circ & \rightarrow & \circ & \circ \end{array}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3}$	0
$C_3$	$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ \circ & \rightarrow & \circ & \circ \end{array}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{1}$	0
$F_4(a_2)$	$\begin{array}{cccc} 0 & 2 & 0 & 2 \\ \circ & \rightarrow & \circ & \circ \end{array}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$	$\frac{4}{4}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$F_4(a_1)$	$\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 0 & 2 \\ \circ & \rightarrow & \circ & \circ \end{array}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$F_4$	$\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 2 & 2 \\ \circ & \rightarrow & \circ & \circ \end{array}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{1}$	0

---

TABLE 8.4 – Covariants pour  $F_4$

---

$G_2$				
Orbite	Diagramme	Covariants	Degrés	$\text{Cl}(\mathcal{O})$
$A_1$	$\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \circ & \rightarrow \circ \end{array}$	(1)	1	0
$\widetilde{A}_1$	$\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \circ & \rightarrow \circ \end{array}$	(1)	1	0
$G_2(a_1)$	$\begin{array}{cc} 0 & 2 \\ \circ & \rightarrow \circ \end{array}$	(2)	4	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$

---

# 8. REPRÉSENTANTS DES GROUPES DES CLASSES : TYPES EXCEPTIONNELS

$G_2$ (suite)				
Orbite	Diagramme	Covariants	Degrés	$\text{Cl}(\mathcal{O})$
$G_2$	$\begin{array}{c} 2 \ 2 \\ \curvearrowright \end{array}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}$	0

TABLE 8.5 – Covariants pour  $G_2$

$E_6$				
Orbite	Diagramme	$\text{Cl}(\mathcal{O})$	Représentants	
1	$\begin{array}{c} \circ - \circ - \circ - \circ \\   \\ \circ \end{array}$	0		
$A_2$	$\begin{array}{c} \circ - \circ - \circ - \circ \\   \\ \bullet \end{array}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\begin{array}{c} \circ - \circ - \circ - \circ \\   \\ \bullet \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}$	$\sim \begin{array}{c} \circ - \circ - \circ - \circ \\   \\ \bullet \end{array} \begin{matrix} -1 \\ -1 \end{matrix}$
$2A_2$	$\bullet - \circ - \circ - \circ - \bullet$	$\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$	$\begin{array}{c} 1 \\ \bullet - \circ - \circ - \circ - \bullet \\   \\ \circ \end{array}$	$\sim \begin{array}{c} -1 \\ \bullet - \circ - \circ - \circ - \bullet \\   \\ \circ \end{array}$
			$\begin{array}{c} 1 \\ \bullet - \circ - \circ - \circ - \bullet \\   \\ \circ \end{array}$	$\sim \begin{array}{c} -1 \\ \bullet - \circ - \circ - \circ - \bullet \\   \\ \circ \end{array}$
$D_4(a_1)$	$\begin{array}{c} \circ - \circ - \bullet - \circ - \circ \\   \\ \circ \end{array}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\begin{array}{c} 1 \\ \circ - \circ - \bullet - \circ - \circ \\   \\ \circ \end{array}$	$\sim \begin{array}{c} -1 \\ \circ - \circ - \bullet - \circ - \circ \\   \\ \circ \end{array}$
$A_4$	$\bullet - \circ - \circ - \circ - \bullet$	$\mathbf{Z}$	$\begin{array}{c} s \quad \epsilon \\ \bullet - \circ - \circ - \circ - \bullet \\   \\ \bullet \end{array}$	$\sim \begin{array}{c} -2s - \epsilon \\ \bullet - \circ - \circ - \circ - \bullet \\   \\ \bullet \end{array}$
			$\begin{array}{c} \epsilon \quad s \\ \bullet - \circ - \circ - \circ - \bullet \\   \\ \bullet \end{array}$	$\sim \begin{array}{c} -2s - \epsilon \\ \bullet - \circ - \circ - \circ - \bullet \\   \\ \bullet \end{array}$
où $s \geq 0$ et $\epsilon \in \{0, 1\}$ .				
$D_4$	$\begin{array}{c} \circ - \circ - \bullet - \circ - \circ \\   \\ \bullet \end{array}$	0		

$E_6$ (suite)			
Orbite	Diagramme	$\text{Cl}(\mathcal{O})$	Représentants
$E_6(a_3)$		$\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$	$\begin{array}{c} 1 \\ \bullet - \circ - \bullet - \circ - \bullet \\   \\ \bullet \end{array} \sim \begin{array}{c} -1 \quad -1 \\ \bullet - \circ - \bullet - \circ - \bullet \\   \\ \bullet \end{array}$ $\begin{array}{c} 1 \\ \bullet - \circ - \bullet - \circ - \bullet \\   \\ \bullet \end{array} \sim \begin{array}{c} -1 \\ \bullet - \circ - \bullet - \circ - \bullet \\   \\ \bullet \end{array}$ $\begin{array}{c} \bullet - \circ - \bullet - \circ - \bullet \\   \\ \bullet \end{array} \sim \begin{array}{c} -1 \\ \bullet - \circ - \bullet - \circ - \bullet \\   \\ \bullet \end{array}$ $\begin{array}{c} 1 \\ \bullet - \circ - \bullet - \circ - \bullet \\   \\ \bullet \end{array} \sim \begin{array}{c} -1 \\ \bullet - \circ - \bullet - \circ - \bullet \\   \\ \bullet \end{array}$ $\begin{array}{c} 1 \\ \bullet - \circ - \bullet - \circ - \bullet \\   \\ \bullet \end{array} \sim \begin{array}{c} -1 \\ \bullet - \circ - \bullet - \circ - \bullet \\   \\ \bullet \end{array}$
$D_5$		$\mathbf{Z}$	$\begin{array}{c} s \quad \epsilon \\ \bullet - \circ - \bullet - \bullet - \bullet \\   \\ \bullet \end{array} \sim 0 \quad \begin{array}{c} -2s - \epsilon \\ \bullet - \circ - \bullet - \bullet - \bullet \\   \\ \bullet \end{array}$ $\begin{array}{c} \epsilon \quad s \\ \bullet - \bullet - \circ - \bullet - \bullet \\   \\ \bullet \end{array} \sim 0 \quad \begin{array}{c} -2s - \epsilon \\ \bullet - \circ - \bullet - \bullet - \bullet \\   \\ \bullet \end{array}$ <p>où <math>s \geq 0</math> et <math>\epsilon \in \{0, 1\}</math>.</p>
$E_6(a_1)$		$\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$	$\begin{array}{c} 1 \\ \bullet - \bullet - \circ - \bullet - \bullet - \bullet \\   \\ \bullet \end{array} \sim \begin{array}{c} -1 \\ \bullet - \bullet - \circ - \bullet - \bullet - \bullet \\   \\ \bullet \end{array}$ $\begin{array}{c} 1 \\ \bullet - \bullet - \circ - \bullet - \bullet - \bullet \\   \\ \bullet \end{array} \sim \begin{array}{c} -1 \\ \bullet - \bullet - \circ - \bullet - \bullet - \bullet \\   \\ \bullet \end{array}$
$E_6$		$\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$	$\begin{array}{c} 1 \\ \bullet - \bullet - \bullet - \circ - \bullet - \bullet \\   \\ \bullet \end{array} \sim \begin{array}{c} -1 \\ \bullet - \bullet - \bullet - \circ - \bullet - \bullet \\   \\ \bullet \end{array}$ $\begin{array}{c} 1 \\ \bullet - \bullet - \bullet - \circ - \bullet - \bullet \\   \\ \bullet \end{array} \sim \begin{array}{c} -1 \\ \bullet - \bullet - \bullet - \circ - \bullet - \bullet \\   \\ \bullet \end{array}$

TABLE 8.6 – Représentants dominants dans  $E_6$

# 8. REPRÉSENTANTS DES GROUPES DES CLASSES : TYPES EXCEPTIONNELS

$E_7$				
Orbite	Diagramme	$\text{Cl}(\mathcal{O})$	Représentants	
1		0		
$(3A)''$		$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\sim$	
$A_2$		$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\sim$	
$2A_2$		0		
$A_2 + 3A_1$		$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\sim$	
$(A_3 + A_1)''$		$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\sim$	
$D_4(a_1)$		$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\sim$	
$D_4$		0		
$A_4$		$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\sim$	
$A_3 + A_2 + A_1$		$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\sim$	

$E_7$ (suite)				
Orbite	Diagramme	$\text{Cl}(\mathcal{O})$	Représentants	
$A_5''$		$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$		$\sim$
$A_4 + A_2$		0		
$D_5(a_1) + A_1$		$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$		$\sim^0$
$E_6(a_3)$		$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$		$\sim^0$
$D_5$		0		
$E_7(a_5)$		$(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$		$\sim$
				$\sim$
				$\sim$
$A_6$		0		
$E_7(a_4)$		$(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$		$\sim$
				$\sim$
				$\sim$

8. REPRÉSENTANTS DES GROUPES DES CLASSES : TYPES EXCEPTIONNELS

$E_7$ (suite)				
Orbite	Diagramme	$\text{Cl}(\mathcal{O})$	Représentants	
$E_6(a_1)$		$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\overset{1}{\bullet} - \circ - \bullet - \circ - \bullet - \circ$ 	$\sim$ $\overset{-1}{\bullet} - \circ - \bullet - \circ - \bullet - \circ$ 
$E_6$		0		
$E_7(a_3)$		$(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$	$\overset{1}{\bullet} - \circ - \bullet - \circ - \bullet - \circ - \bullet$  $\overset{1}{\bullet} - \circ - \bullet - \circ - \bullet - \circ - \bullet$  $\bullet - \circ - \bullet - \circ - \bullet - \circ - \bullet$ 	$\sim$ $\overset{-1}{\bullet} - \circ - \bullet - \circ - \bullet - \circ - \bullet$  $\sim$ $\overset{-1}{\bullet} - \circ - \bullet - \circ - \bullet - \circ - \bullet$  $\sim$ $\overset{-1}{\bullet} - \circ - \bullet - \circ - \bullet - \circ - \bullet$ 
$E_7(a_2)$		$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\circ - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet$ 	$\sim$ $\circ - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet$ 
$E_7(a_1)$		$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\bullet - \bullet - \circ - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet$ 	$\sim$ $\bullet - \bullet - \circ - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet$ 
$E_7$		$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet$ 	$\sim$ $\bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet$ 

TABLE 8.7 – Représentants dominants dans  $E_7$

$E_8$			
Orbite	Diagramme	$\text{Cl}(\mathcal{O})$	Représentants
1		0	



$E_8$ (suite)				
Orbite	Diagramme	$\text{Cl}(\mathcal{O})$	Représentants	
$A_2$		$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$		$\sim$
$2A_2$		$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$		$\sim$
$D_4(a_1)$		$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$		$\sim$
$D_4$		0		
$A_4$		$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$		$\sim$
$D_4(a_1) + A_2$		$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$		$\sim$
$A_4 + A_2$		0		
$D_4 + A_2$		$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$		$\sim^0$
$E_6(a_3)$		$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$		$\sim^0$
$D_5$		0		

# 8. REPRÉSENTANTS DES GROUPES DES CLASSES : TYPES EXCEPTIONNELS

$E_8$ (suite)				
Orbite	Diagramme	$\text{Cl}(\mathcal{O})$	Représentants	
$E_8(a_7)$		$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\sim$	
$A_6$		0		
$E_6(a_1)$		$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\sim$	
$D_5 + A_2$		$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\sim^0$	
$E_6$		0		
$E_8(b_6)$		$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\sim$	
$D_7(a_1)$		$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\sim^0$	
$E_8(a_6)$		$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\sim$	
$E_8(b_5)$		$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\sim^0$	
$E_8(a_5)$		$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\sim$	

$E_8$ (suite)			
Orbite	Diagramme	$\text{Cl}(\mathcal{O})$	Représentants
$E_8(b_4)$		$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\overset{1}{\bullet}$ - $\sim^0$ $\overset{-1}{\bullet}$ -
$E_8(a_4)$		$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\sim$
$E_8(a_3)$		$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\sim^0$
$E_8(a_2)$		0	
$E_8(a_1)$		0	
$E_8$		0	

TABLE 8.8 – Représentants dominants dans  $E_8$

$F_4$			
Orbite	Diagramme	$\text{Cl}(\mathcal{O})$	Représentants
1		0	
$A_2$		$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\overset{1}{\bullet}$ - $\sim$ $\overset{-1}{\bullet}$ -
$\tilde{A}_2$		0	

# 8. REPRÉSENTANTS DES GROUPES DES CLASSES : TYPES EXCEPTIONNELS

$F_4$ (suite)				
Orbite	Diagramme	$\text{Cl}(\mathcal{O})$	Représentants	
$F_4(a_3)$		$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\overset{1}{\circ} \text{---} \bullet \text{---} \circ \text{---} \circ \sim \overset{-1}{\circ} \text{---} \bullet \text{---} \circ \text{---} \circ$	
$B_3$		0		
$F_4(a_2)$		$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\circ \text{---} \bullet \text{---} \circ \text{---} \bullet \overset{1}{\bullet} \sim \circ \text{---} \bullet \text{---} \circ \text{---} \bullet \overset{-1}{\bullet}$	
$F_4$		0		

TABLE 8.9 – Représentants dominants dans  $F_4$

$G_2$			
Orbite	Diagramme	$\text{Cl}(\mathcal{O})$	Représentants
1		0	
$G_2(a_1)$		$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\circ \text{---} \bullet \overset{1}{\bullet} \sim \circ \text{---} \bullet \overset{-1}{\bullet}$
$G_2$		0	

TABLE 8.10 – Représentants dominants dans  $G_2$

# Bibliographie

- [1] Ascah-Coallier, I. *Cohomologie de fibrés en droite sur le fibré cotangent de variétés grassmaniennes généralisées*, thèse de doctorat, Université de Montréal, <http://hdl.handle.net/1866/9701>, 2012.
- [2] Baohua, F. *Symplectic resolutions for nilpotent orbits*, *Inventiones Mathematicæ*, **151**, pp. 167–186, 2003.
- [3] Baohua, F. *Symplectic resolutions for nilpotent orbits*, arXiv:math/0205048v2, 2004.
- [4] Bardsley, P. et Richardson, R. W. *Étale slices for algebraic transformation groups in characteristic  $p$* , *Proceedings of the London Mathematical Society*, **51**, pp. 295–317, 1985.
- [5] Bourbaki, N. *Algèbre commutative, Chapitres 5 à 7*, Hermann, Paris, 1965.
- [6] Bourbaki, N. *Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4, 5, 6*, Masson, Paris, 1981.
- [7] Brylinski, R. *Limits of weight spaces, Lusztig's  $q$ -analogs, and fibering of adjoint orbits*, *Journal of the American Mathematical Society*, **2**, pp. 517–533, 1989.
- [8] Broer, A. *Decomposition varieties in semisimple Lie algebras*, *Canadian Journal of Mathematics*, **50**, pp. 929–971, 1998.
- [9] Broer, A. *Line bundles on the cotangent bundle of the flag variety*, *Inventiones Mathematicæ*, **113**, pp. 1–20, 1993.
- [10] Broer, A. *Normality of some nilpotent varieties and cohomology of line bundles on the cotangent bundle of the flag variety*, dans Brylinski, J.-L. ; Brylinsky, R. et Guillemin, V. (éditeurs) *Lie theory and geometry*, *Progress in Mathematics*, **123**, Birkhäuser, Boston, 1994.

- [11] Carter, R. W. *Finite Groups of Lie Type : conjugacy classes and complex characters*, Pure and Applied Mathematics, John Wiley & Sons, New York, 1985.
- [12] Chriss, N. et Ginzburg, V. *Representation Theory and Complex Geometry*, Birkhäuser, Boston, 1997.
- [13] Collingwood, D. H. et McGovern, W. M. *Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras*, Van Nostrand Reinhold Mathematics Series, Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1993.
- [14] Demazure, M. *A very simple proof of Bott's theorem*, *Inventiones Mathematicæ*, **33**, pp. 271–272, 1976.
- [15] Ellis, J., Fan, H. et Shallit J. *The Cycles of the Multiway Perfect Shuffle Permutation*, *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, **5**, pp. 169–190, 2002.
- [16] Frank, G. *Über nilpotente Orbite und Schichten in klassischen komplexen Lie-Algebren*, Bergische Universität Wuppertal, 2004.
- [17] Grauert, H. et Riemenschneider, O. *Verschwindungssätze für analytische Kohomologiegruppen auf komplexen Räumen*, *Inventiones Mathematicæ*, **11**, pp. 263–292, 1970.
- [18] Grosshans, F. D. *Algebraic Homogeneous Spaces and Invariant Theory*, *Lecture Notes in Mathematics*, **1673**, Springer–Verlag, New York, 1997.
- [19] Hague, C. *Cohomology of flag varieties and the Brylinski–Kostant filtration*, *Journal of Algebra*, **321**, pp. 3790–3815, 2009.
- [20] Hartshorne, R. *Algebraic Geometry*, *Graduate Texts in Mathematics*, **52**, Springer–Verlag, New York, 1977.
- [21] Hartshorne, R. *Residues and Duality*, *Lectures Notes in Mathematics*, **20**, Springer–Verlag, New York, 1966.
- [22] Hartshorne, R. *Stable Reflexive Sheaves*, *Mathematische Annalen*, **254**, pp. 121–176, 1980.
- [23] Hesselink, W. H. *Cohomology and the Resolution of Nilpotent Variety*, *Mathematische Annalen*, **223**, pp. 249–252, 1976.

- 
- [24] Hesselink, W. H. *Polarizations in the Classical Groups*, Mathematische Zeitschrift, **160**, pp. 217–234, 1978.
- [25] Hinich, V. *On the singularities of nilpotent orbits*, Israel Journal of Mathematics, **73**, pp. 297–308, 1991.
- [26] Humphreys, J. E. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Graduate Texts in Mathematics, **9**, Springer–Verlag, New York, 1972.
- [27] Humphreys, J. E. *Linear algebraic groups*, Graduate Texts in Mathematics, **21**, Springer–Verlag, New York, 1975.
- [28] Jackson, S. G. et Noël, A. G. *Prehomogeneous spaces associated with complex nilpotent orbits*, Journal of Algebra, **289**, pp. 515–557, 2005.
- [29] Kempf, G. R. *On the collapsing of homogeneous bundles*, Inventiones Mathematicæ, **37**, pp. 229–239, 1976.
- [30] Kimura, T. *Introduction to prehomogeneous vector spaces*, Translations of Mathematical Monographs, **215**, American Mathematical Society, Providence, 2003.
- [31] Kostant, B. *Lie group representations on polynomial rings*, American Journal of Mathematics, **85**, pp. 327–404, 1963.
- [32] Knop, F., Kraft H. et Vust T. *The Picard group of a  $G$ -variety*, dans *Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie*, DMV Seminar, **13**, pp. 77–88, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1989.
- [33] Kraft, H. et Procesi, C. *On the geometry of conjugacy classes in classical groups*, Commentarii Mathematici Helvetici, **57**, pp. 539–602, 1982.
- [34] Kraft, H. et Procesi, C. *Closures of conjugacy classes of matrices are normal*, Inventiones Mathematicæ, **53**, pp. 227–246, 1979.
- [35] Lusztig, G. *Intersection cohomology complexes on a reductive group*, Inventiones Mathematicæ, **75**, pp. 205–272, 1984.
- [36] Panyushev, D. I., *Rationality of singularities and the Gorenstein property for nilpotent orbits*, Functional Analysis and Its Applications, **25**, pp. 225–226, 1991.

- [37] Popov V. L. *Picard groups of homogeneous spaces of linear algebraic groups and one dimensional homogeneous vector bundles*, Mathematics of the USSR—Izvestiya, **8**, pp. 301–327, 1974.
- [38] Richardson, R. W. *Conjugacy classes in Lie algebras and algebraic groups*, Annals of Mathematics, **86**, pp. 1–15, 1967.
- [39] Richardson, R. W. *Conjugacy classes in parabolic subgroups of semi-simple algebraic groups*, Bulletin of the London Mathematical Society, **6**, pp. 21–24, 1974.
- [40] Shimura G. *Arithmetic and analytic theories of quadratic forms and Clifford groups*, Mathematical Surveys and Monographs, **109**, American Mathematical Society, 2004.
- [41] Sommers, E. N. *Cohomology of line bundles on the cotangent bundle of a Grassmannian*, Proceedings of the American Mathematical Society, **137**, pp. 3291–3296, 2009.
- [42] Sommers, E. N. *Normality of nilpotent varieties in  $E_6$* , Journal of Algebra, **270**, pp. 288–306, 2003.
- [43] Sommers, E. N. *Normality of very even nilpotent varieties in  $D_{2l}$* , Bulletin of the London Mathematical Society, **37**, pp. 351–360, 2005.
- [44] Springer, T. A. et Steinberg, R. *Conjugacy Classes*, dans *Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups*, Lecture Notes in Mathematics, **131**, pp. 167–266, Springer–Verlag, New York, 1970.
- [45] Springer T. A. *The unipotent variety of a semi-simple group*, dans *Algebraic Geometry, International Colloquium, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1968*, pp. 373–391, Oxford University Press, London, 1969.
- [46] Weyman, J. M. *Cohomology of vector bundles and syzygies*, Cambridge Tracts in Mathematics, **149**, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [47] Yuan, S. *Reflexive modules and algebra class groups over noetherian integrally closed domains*, Journal of Algebra, **32**, pp. 405–417, 1974.